ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σελίδες 554 | ©2023 Tolaso Network

TOLASO NETWORK

Συγγραφέας:	Tolaso tolaso@tolaso.com.gr
Ηλεκτρονική Σχεδίαση:	LaTeXify.org enquiries@latexify.org
Επιμέλεια Κειμένου:	Tolaso tolaso@tolaso.com.gr
Επιμέλεια Σχημάτων:	Tolaso Group info@tolaso.com.gr
Επιμέλεια Εξωφύλλου:	VARFIS (Print & Publishing) info@dvarfis.gr
Επιστημονική επιμέλεια:	Μελέτης Μεϊντάνης meletis_meintanis@hotmail.com
Γλώσσα / Χώρα:	Ελληνική / Ελλάδα
ISBN:	

Η στοιχειοθεσία του παρόντος βιβλίου έχει γίνει με το δημοφιλές πρόγραμμα στοιχειοθεσίας XeTeX.

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει τη σφραγίδα του συγγραφέα.

Tolaso TRos

Στα παιδιά που προσπαθούν!

Tolaso

«Κάποτε οι καμπύλες των γραφικών παραστάσεων ζωντανεύουν, είναι διαφορίσιμες γιατί είναι λείες και όμορφες, έχουν ακρότατες τιμές γιατί αρνούνται τη μονοτονία, δεν έχουν όριο πραγματικό, αλλά μπορείς να τις φαντάζεσαι στο άπειρο και η ασύμπτωτη είναι η ευθεία που σε ταξιδεύει πλάι τους.»

$$\int \quad \int \quad \int$$

Περιεχόμενα

Αντί Προλόγου

Αγαπητέ αναγνώστη,

το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου πραγματεύεται την ύλη των Μαθηματικών Γ' Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών, Οικονομίας και Πληροφορικής και έχει γραφεί με την επιθυμία να αποτελέσει ένα σημαντικό βοήθημα τόσο στη κατανόηση των λεπτών εννοιών του μαθήματος αλλά και στην εμπέδωση της ύλης.

Το βιβλίο περιέχει 6 κεφάλαια:

- Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες των συναρτήσεων. Παρουσιάζονται τόσο η έννοια της συνάρτησης (πεδίο ορισμού, γραφική παράσταση) όσο και κάποιες ιδιότητες που μπορεί να έχουν (άρτια, περιττή, περιοδική). Στο κεφάλαιο επίσης αναπτύσσονται οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, η μονοτονία και τα ακρότατα καθώς επίσης και η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

- Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εξωαλγεβρική έννοια, αυτή του ορίου. Το όριο παίζει σημαντικό ρόλο στις συναρτήσεις καθώς μας επιτρέπει να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε σημεία που κυρίως δεν ορίζεται. Μελετούνται τόσο τα πεπερασμένα όρια όσο και τα μη πεπερασμένα αλλά και τα όρια στο άπειρο. Τέλος, παρουσιάζεται η έννοια της συνέχειας συνάρτησης αλλά και κάποια βασικά θεωρήματα που αφορούν τις συνεχείς συναρτήσεις.

Με την ολοκλήρωση των 2 πρώτων κεφαλαίων ακολουθούν ασκήσεις κατανόησης (Σ-Λ, ισχυρισμοί, κτλ.) καθώς επίσης και επαναληπτικές ασκήσεις πάνω στις ήδη ανεπτυγμένες έννοιες.

- Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται βασικές έννοιες γύρω από τη παράγωγο. Πιο συγκεκριμένα το κεφάλαιο ανοίγει εισάγοντας την έννοια της παράγωγου αλλά και της εφαπτόμενης συνάρτησης σε σημείο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι κανόνες παραγώγισης καθώς και ο ρυθμός μεταβολής.

- Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται βασικές έννοιες γύρω από τη μελέτη συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων. Πιο συγκεκριμένα μελετώνται η σύνδεση της παραγώγου με τη μονοτονία και τα κοίλα μιας συνάρτησης, το θεώρημα Fermat και πώς αυτό συνδέεται με τα ακρότατα μιας συνάρτησης καθώς επίσης και οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Γίνεται επίσης αναφορά στο κανόνα De'L Hôspital. Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης.

- Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μία πρώτη αναφορά στην έννοια της σταθερής συνάρτησης μέσω των σχετικών θεωρημάτων. Ακολουθούν βασικές διαφορικές εξισώσεις που σχετίζονται με τη θεωρία της σταθερής συνάρτησης. Κλείνουμε το κεφάλαιο με τα πιο βασικά θεωρήματα ύπαρξης του διαφορικού λογισμού τα οποία είναι το θεώρημα Rôlle και το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Με την ολοκλήρωση των παραπάνω τριών κεφαλαίων, ακολουθούν ασκήσεις κατανόησης (Σ-Λ, ισχυρισμοί, κτλ) καθώς επίσης και επαναληπτικές ασκήσεις πάνω στις ήδη ανεπτυγμένες έννοιες. Περιλαμβάνονται επίσης συνδυαστικές ασκήσεις οι οποίες καλύπτουν ύλη και από προηγούμενα κεφάλαια, κυρίως αυτό των ορίων.

- Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Το κεφάλαιο ανοίγει με την έννοια της παράγουσας και κάποιες ιδιότητες του αορίστου ολοκληρώματος για τις συνεχείς συναρτήσεις. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στο ορισμένο ολοκλήρωμα, τις ιδιότητες αυτού αλλά και στις βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης. Επιπλέον αναφέρονται βασικές ανισότητες που αφορούν το ορισμένο ολοκλήρωμα. Το κεφάλαιο κλείνει με μία σύντομη αναφορά στη συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ καθώς και με εκτενή παρουσίαση της έννοιας του εμβαδού επιπέδου χωρίου η οποία είναι πολύ σημαντική.

Με την ολοκλήρωση της βασικής ύλης, θα έρθεις αντιμέτωπος με επαναληπτικές ασκήσεις εφ' όλης της ύλης.

Η δομή του βιβλίου **δεν ακολουθεί** αυτή του σχολικού βιβλίου αλλά παρεκκλίνει ελάχιστα για παιδαγωγικούς λόγους. Θεωρήσαμε σκόπιμο να αλλάξουμε τη σειρά κάποιων ενοτήτων ώστε να υπάρχει συνοχή του κειμένου. Οι προτεινόμενες ασκήσεις επιλέχθηκαν με ιδιαίτερη προσοχή. Ο αναγνώστης θα αντιμετωπίσει ποικιλία ασκήσεων από τις λεγόμενες ρουτίνας μέχρι αυτές που απαιτούν κριτική σκέψη.

Απόρροια του παραπάνω είναι ότι ο διδάσκοντας μπορεί να διδάξει πρώτα το κεφάλαιο 5 και στη συνέχεια το κεφάλαιο 4. Επαφίεται στη κρίση του.

Κρίθηκε αναγκαίο να μη παρατεθούν οι λύσεις των ασκήσεων στο τέλος του βιβλίου. Έτσι, δίδεται το κίνητρο στον μαθητή να εξασκήσει τις γνώσεις του, να συνδυάσει δεδομένα, να αναπτύξει τη μαθηματική του σκέψη και να καλλιεργήσει την κριτική του ικανότητα. Στόχος της προσπάθειας αυτής είναι να αντιληφθεί ο μαθητής ότι πρέπει να οξύνει το νου, ν' αναλύει τη σκέψη του και να την αιτιολογεί και όχι απλά να φτάνει σε ένα στείρο αποτέλεσμα.

Για τη συγγραφή του βιβλίου αυτού συμβουλευτήκαμε τόσο την εγχώρια όσο και τη διεθνή βιβλιογραφία. Από τη δεύτερη αντλήσαμε θέματα που αφορούν την οπτικοποίηση των συναρτήσεων και πώς μέσω της γραφικής παράστασης μπορούμε να αντλήσουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη συνάρτηση την ίδια. Επίσης, αντλήσαμε θέματα που συνδέουν τις συναρτήσεις με τη γεωμετρία. Μία λίστα όλων των πηγών που χρησιμοποιήσαμε μπορείτε να βρείτε στο τέλος του βιβλίου στη *Βιβλιογραφία.*

Το βιβλίο αυτό ως ανθρώπινο δημιούργημα ενδέχεται να έχει λάθη ή παραλείψεις. Παρακαλείται όποιος συνάδελφος εντοπίσει λάθη στο κείμενο, στις λυμένες ασκήσεις ή στις λύσεις των ασκήσεων να επικοινωνήσει με το συγγραφέα ώστε να διορθωθούν σε επόμενη έκδοση.

Τέλος, όποιος συνάδελφος επιθυμεί μπορεί να ασκήσει *εποικοδομητική κριτική* ώστε το βιβλίο αυτό να γίνει καλύτερο.

Ο συγγραφέας
Νέα Υόρκη, 10010, Ηνωμένες Πολιτείες,
Νοέμβριος 2023

Ευχαριστίες:

Ο συγγραφέας θα ήθελε να ευχαριστήσει:

- το φίλο Μελέτη Μεϊντάνη για την ανάγνωση του πρωτότυπου κειμένου και τις εύστοχες παρατηρήσεις του ώστε να πάρει το βιβλίο αυτό τη τελική του μορφή
- τη φιλόλογο Μίνα Κοντού για τη φιλολογική επιμέλεια του βιβλίου.
- την εταιρεία ΤΕΧΝΟΤΥΠΙΑ με διακριτικό τίτλο Latexify.org και αριθμό Γ.Ε.ΜΗ 171534440000 για τη τελική μορφοποίηση του κειμένου.
- όλους εσάς που με τις εύστοχες παρατηρήσεις σας συμβάλλατε στη διόρθωση τυπογραφικών λαθών.

Κατάλογος αλλαγών

Αγαπητέ αναγνώστη,

το βιβλίο αυτό προέκυψε ύστερα από συγχώνευση των βιβλίων *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών, Οικονομίας και Πληροφορικής Τεύχος Ι* και *Μαθηματικά Γ' Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών, Οικονομίας και Πληροφορικής Τεύχος ΙΙ.*

Στη παρούσα έκδοση, με κωδικό Bravo, έχουν ενσωματωθεί όλες οι παρατηρήσεις που απεστάλησαν από συναδέλφους και διορθώθηκαν τα παροράματα. Πιο συγκεκριμένα οι αλλαγές κινούνται σε 3 άξονες:

1. **ως προς τη μορφοποίηση:**

   - μίκρυναν τα περιθώρια του βιβλίου. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα στα ήδη υπάρχοντα σχήματα να εφαρμοστεί σμίκρυνση ώστε να είναι εφαρμοστά στα καινούργια περιθώρια.
   - αρκετά ήδη υπάρχοντα σχήματα αντικαταστάθηκαν με άλλα πιο εύληπτα. Για παράδειγμα, άλλαξαν τα σχήματα που απεικόνιζαν τη σύνθεση συναρτήσεων, την αντίστροφη συνάρτηση, κτλ.
   - έγιναν χρωματικές παρεμβάσεις σε όλο το βιβλίο.
   - έγινε αλλαγή στο περιβάλλον που φιλοξενούσε τη λύση της εκάστοτε άσκησης.
   - αλλάχθηκαν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις από το λατινικό τύπο στον ελληνικό τύπο.
   - έγινε χρήση του πακέτου PAC fancy ώστε οι κεφαλίδες να αντικατοπτρίζουν το τρέχον περιεχόμενο της σελίδας. Αυτό έχει ως συνέπεια τα περιεχόμενα να «χτίζονται» με το χέρι χωρίς να επιβαρύνεται το κεφάλαιο με περισσότερες ενότητες.

2. **ως προς το περιεχόμενο**:

   - αφαιρέθηκαν ασκήσεις που κατά τη κρίση του συγγραφέα βάρυναν το βιβλίο.
   - αφαιρέθηκαν οι λύσεις των ασκήσεων και πλέον διατίθενται σε ξεχωριστό τεύχος.

- αφαιρέθηκαν τα παραρτήματα.
- προστέθηκαν αρκετές καινούργιες ασκήσεις ώστε να υπάρχει αρκετή ποικιλία άλυτων.
- προστέθηκαν περισσότερα επαναληπτικά διαγωνίσματα με αρκετά προσεκτικά επιλεγμένες ασκήσεις. Δίδεται, έτσι, η δυνατότητα στον αναγνώστη να ελέγχει την αφομοίωση της ύλης καλύτερα.
- προστέθηκαν περισσότερα επαναληπτικά διαγωνίσματα με αρκετά προσεκτικά επιλεγμένες ασκήσεις. Δίδεται, έτσι, η δυνατότητα στον αναγνώστη να ελέγχει την αφομοίωση της ύλης καλύτερα.
- προστέθηκε η ενότητα 6.6 «Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.»

3. **ως προς τη γραμματοσειρά**:

- αντικαταστάθηκε η Linux Libertine με τη GFS Didot (Διδώ).
- αντικαταστάθηκε η μαθηματική γραμματοσειρά $\mathcal{AMS}$ με την Euler.

TEXνικά θέματα

Η συγγραφή ενός βιβλίου απαιτεί υπομονή και επιμονή. Αν γράφεται κιόλας στη LaTeX τότε χρειάζονται και γερά νεύρα. Αν και η LaTeX ενδείκνυται για συγγραφή μαθηματικών και γενικότερα επιστημονικών κειμένων υπάρχουν φορές που χρειάζεται να επιλυθούν θέματα που αφορούν τη στοιχειοθεσία.

Το βιβλίο αυτό έχει στοιχειοθετηθεί με τη LaTeX και ειδικότερα με το XeTeX το οποίο στηρίζει σε απόλυτο βαθμό την ελληνική γλώσσα. Για την ολοκλήρωση τού συνεργάζονται αρμονικά 50 πακέτα και πάνω από 150 μακροεντολές. Ειδικότερα, έχουν χρησιμοποιηθεί τα δημοφιλή πακέτα:

- το πακέτο PAC enumitem για την αρίθμηση των ασκήσεων ή των παρατηρήσεων μαζί με τις επεκτάσεις του.
- τα πακέτα PAC tikz, PAC pgf, PAC pstricks για τη δημιουργία των σχημάτων, των πινάκων μονοτονίας και κυρτότητας σε συνδυασμό με πληθώρα βιβλιοθηκών μερικές εκ των οποίων σημαντικών είναι:
  - LIB fit, LIB shapes, LIB snakes, LIB arrows
  - LIB intersections, LIB backgrounds, LIB calc, LIB trees,
  - LIB patterns, LIB scopes, LIB shadows, LIB positioning
- το πακέτο PAC tcolorbox για τη δημιουργία των πλαισίων στα οποία γράφονται οι παρατηρήσεις, οι ορισμοί, τα πορίσματα ή τα θεωρήματα.
- τα πακέτα PAC fontawesome και PAC marvosym για την εισαγωγή των εικονιδίων.
- το πακέτο PAC bigints για την εισαγωγή ολοκληρωμάτων υπό κλίμακα.

Όλοι οι μαθηματικοί τελεστές έχουν γραφεί στην Ελληνική γλώσσα ώστε να υπάρχει μία αντιστοιχία με το σχολικό βιβλίο. Για το σκοπό αυτό έχουν γραφεί μακροεντολές, οι οποίες έχουν διττό ρόλο: (α) αφενός να απεικονίζουν σωστά τους μαθηματικούς τελεστές και (β) αφετέρου να τακτοποιούν σωστά το όρισμα αφήνοντας ένα κενό μεταξύ αυτού και του τελεστή.

Για τη συγγραφή αυτού του βιβλίου έχει χρησιμοποιηθεί η κλάση εγγράφου memoir. Μέσω αυτής δίδεται καλύτερη ευελιξία τόσο στη μορφοποίηση των κεφαλαίων, αλλά και των περιεχομένων. Η τελική μορφή των κεφαλαίων καθώς και των ενοτήτων έχει δοθεί μέσω μακροεντολών.

Η γραμματοσειρά του βιβλίου είναι η Διδώ. Ο πρωτότυπος σχεδιασμός της, όπως εμφανίζεται στις εκδόσεις των πρώτων δεκαετιών του 19ου αιώνα, ψηφιοποιήθηκε και αποτυπώθηκε από τον Γιώργο Δ. Ματθιόπουλο το 2006 στα πλαίσια της συνεργασίας της ΕΕΤΣ με το Τμήμα Φιλολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και είναι πλέον διαθέσιμος για ελεύθερη χρήση. Απεναντίας, η γραμματοσειρά του μαθηματικού κειμένου είναι η Euler. Τέλος, το μέγεθος γραμματοσειράς είναι 12 πόντοι.

Με την ολοκλήρωση κάθε ενότητας, ο αναγνώστης έρχεται αντιμέτωπος με το «στολίδι» . Το «στολίδι» αυτό έχει διττό ρόλο: (α) αφενός σημάνει την ολοκλήρωση της ενότητας και (β) κάνει πιο ξεκούραστη την ανάγνωση του βιβλίου. Παρέχεται μέσω του πακέτου PAC pgfornament.

Τέλος, το μέγεθος του βιβλίου παραμένει σχετικά μικρό παρά το μεγάλο αριθμό σελίδων. Αυτό οφείλεται πρωτίστως στο πρόγραμμα στοιχειοθεσίας XƎTEX, τη χρησιμοποιούμενη γραμματοσειρά, το γεγονός ότι τα σχήματα παράγονται με κώδικα καθώς επίσης και στις διάφορες ρυθμίσεις μεταγλώττισης.

Συμβολισμοί

Παρουσιάζουμε παρακάτω κάποιους συμβολισμούς τους οποίους χρησιμοποιούμε εκτεταμένα στο βιβλίο αυτό.

$\mathbb{N}$	το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{N}^*$	το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0
$\mathbb{Z}$	το σύνολο των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}^*$	το σύνολο των ακεραίων αριθμών χωρίς το 0
$\mathbb{Q}$	το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{Q}^*$	το σύνολο των ρητών αριθμών χωρίς το 0
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^*$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών χωρίς το 0
$A \cup B$	ένωση συνόλων
$A \cap B$	τομή συνόλων
$A \setminus B$	διαφορά συνόλων
$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\gcd(\cdot,\cdot)$	μέγιστος κοινός διαιρέτης
$\operatorname{lcm}(\cdot,\cdot)$	ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
$\sum$	άθροισμα
$\prod$	γινόμενο
$\int$	αόριστο ολοκλήρωμα
$\int_\alpha^\beta$	ορισμένο ολοκλήρωμα

Κεφάλαιο 1

Συναρτήσεις (Βασικά Στοιχεία)

1.1 Η έννοια της συνάρτησης

Βασική Θεωρία *(Βασικά χαρακτηριστικά συνάρτησης)*

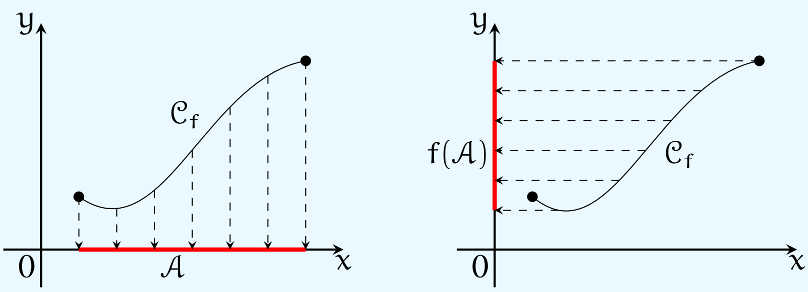
- **Συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathcal{A}$ και σύνολο αφίξεως το σύνολο $\mathcal{B}$ καλείται μία διαδικασία (κανόνας) η οποία λαμβάνει τιμές από το $\mathcal{A}$ και τις απεικονίζει σε μοναδικές τιμές του συνόλου $\mathcal{B}$.

- **Πεδίο ορισμού** μιας πραγματικής συνάρτησης f καλούμε το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο το $f(x)$ έχει νόημα. Συμβολίζεται ως $\mathcal{D}_f$ ή $\mathcal{D}(f)$ ή με κάποιο κεφαλαίο γράμμα π.χ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ κτλ.

- **Πεδίο τιμών** ή **σύνολο τιμών** της f καλούμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in \mathcal{A}$. Είναι δηλαδή:

$$f(\mathcal{A}) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο } x \in \mathcal{A}\}$$

Διαγραμματικά για το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης έχουμε ότι:



Σχήμα 1.1: Πεδίο ορισμού - Σύνολο Τιμών

1.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Βασική Θεωρία *(Γραφική παράσταση συνάρτησης)*

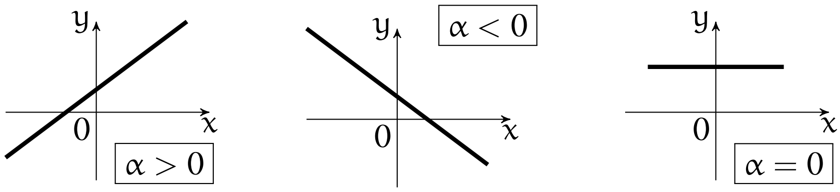
Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ τέτοια ώστε $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ όπου $x \in \mathcal{A}_f$.

Παρατηρήσεις:

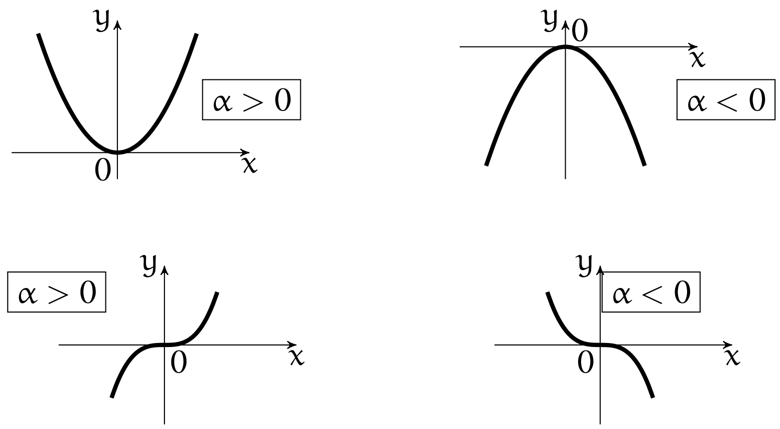
(α΄) Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται συνήθως με $\mathcal{C}_f$.

(β΄) Επειδή κάθε $x \in \mathcal{A}_f$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.

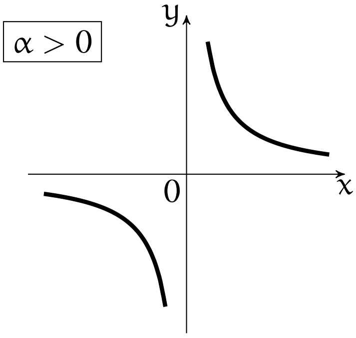
1.2.1 Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

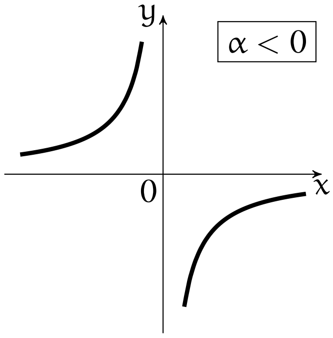


1.2.2 Οι πολυωνυμικές $y = \alpha x^2$ και $y = \alpha x^3$ με $\alpha \neq 0$

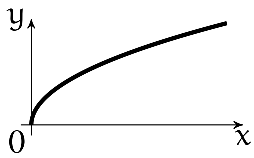


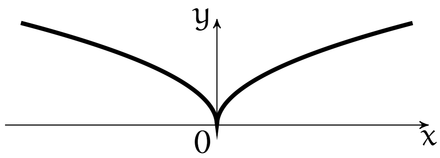
1.2.3 Η ρητή $y = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha \neq 0$



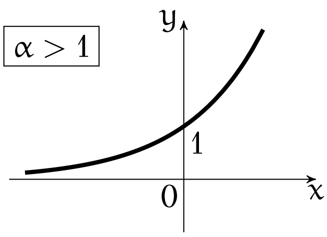


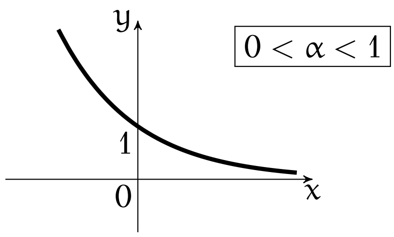
1.2.4 Οι συναρτήσεις $y = \sqrt{x}$ και $y = \sqrt{|x|}$



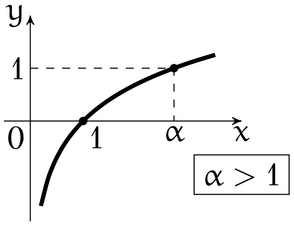


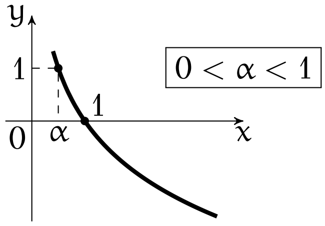
1.2.5 Η εκθετική συνάρτηση $y = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$





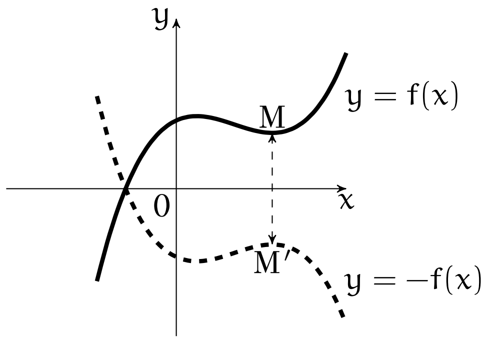
1.2.6 Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$



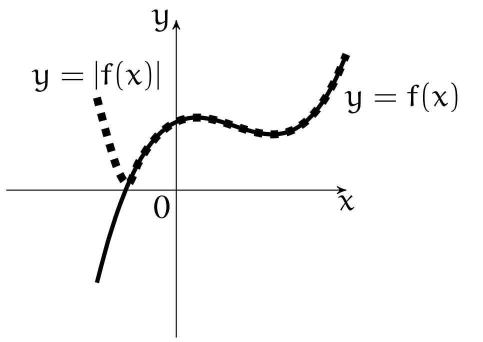


1.2.7 Γραφικές παραστάσεις των $y = |f(x)|$ και $y = -f(x)$

(α′) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$.



(β′) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της $\mathcal{C}_f$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της $\mathcal{C}_f$ που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

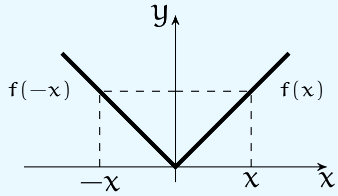


1.3 Συμμετρίες γραφικής παράστασης

Βασική Θεωρία *(Άρτια συνάρτηση)*

Μία συνάρτηση f θα λέγεται **άρτια** αν:

- για κάθε x στο πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ ανήκει σε αυτό και το $-x$ και
- $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$

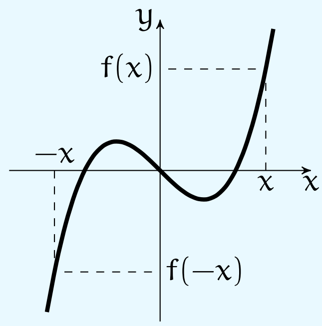


Σχήμα 1.2: Άρτια συνάρτηση

Βασική Θεωρία ***(Περιττή συνάρτηση)***

Μία συνάρτηση f θα λέγεται **περιττή** αν:

- για κάθε x στο πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ ανήκει σε αυτό και το $-x$ και
- $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$



Σχήμα 1.3: Περιττή συνάρτηση

Βασική Θεωρία ***(Συμμετρία γραφικής παράστασης γύρω από σημείο)***

Το γράφημα μιας συνάρτησης f είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $A(x_0, y_0)$ αν :

- για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ανήκει σε αυτό και το $2x_0 - x$ και
- $f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις:

(α′) Το γράφημα μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$.

(β′) Το γράφημα μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.

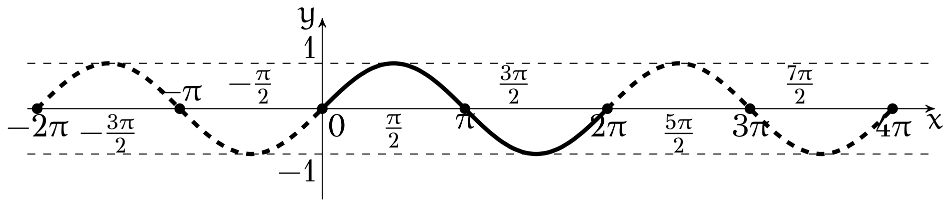
Βασική Θεωρία ***(Περιοδική συνάρτηση)***

Μία συνάρτηση $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ καλείται **περιοδική** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \mathcal{A}$ να είναι

- $x + T \in \mathcal{A}$ και $x - T \in \mathcal{A}$
- $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$

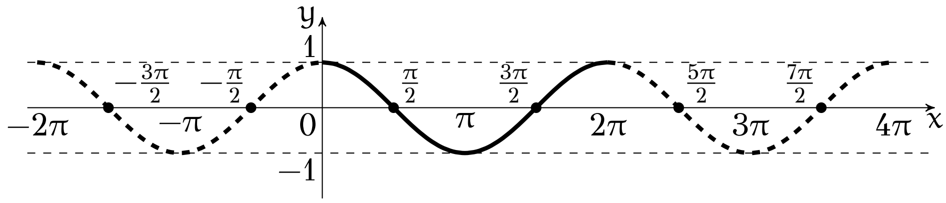
1.3.1 Η συνάρτηση $y = \eta\mu\, x$

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\, x$ είναι **περιοδική** με περίοδο $T = 2\pi$.



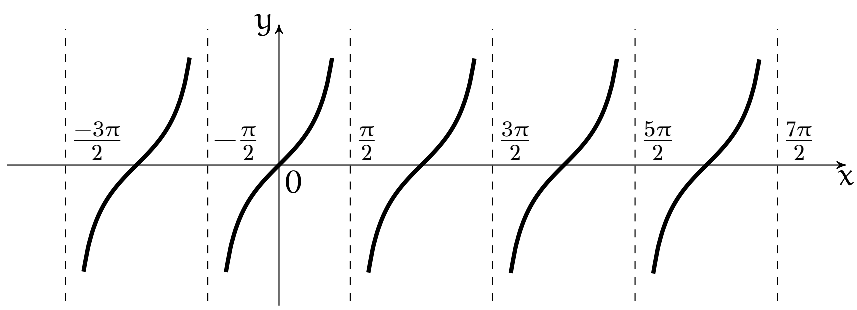
1.3.2 Η συνάρτηση $y = \sigma\upsilon\nu\, x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ είναι **περιοδική** με περίοδο $T = 2\pi$.



1.3.3 Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi\, x$

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi\, x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Επιπλέον, είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.



1.4 Μετατοπίσεις γραφικής παράστασης

Βασική Θεωρία *(Γραφική παράσταση της* $\varphi(x) = f(x) + c$*)*

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) + c$ όπου $c > 0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες **προς τα πάνω**.

Βασική Θεωρία *(Γραφική παράσταση της* $\varphi(x) = f(x) - c$*)*

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) - c$ όπου $c > 0$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες **προς τα κάτω**.

Βασική Θεωρία *(Γραφική παράσταση της* $\varphi(x) = f(x + c)$*)*

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x + c)$ όπου $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**.

Βασική Θεωρία *(Γραφική παράσταση της* $\varphi(x) = f(x - c)$*)*

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x - c)$ όπου $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**.

Λυμένα παραδείγματα

1. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$,$f(-2)$, $f(1)$.

Λύση.

(α′) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

(β′) Είναι $f(0) = -2$, $f(-2) = 0$ και $f(1) = 6$.

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

(α′) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

(β′) $g(x) = \dfrac{3x+1}{|x|-x}$

Λύση.

(α′) Πρέπει $x - 3 \neq 0$, δηλ. $x \neq 3$. Συνεπώς $\mathcal{A}_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(β′) Πρέπει $|x| - x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq x$. Όμως, $|x| \geqslant x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει όταν $x \geqslant 0$. Συνεπώς $\mathcal{A}_f = (-\infty, 0)$.

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

(α′) $f(x) = \sqrt{2-x}$

(β′) $g(x) = \sqrt{x^2-4} + \dfrac{1}{x-2}$

Λύση.

(α′) Πρέπει $x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$. Συνεπώς $\mathcal{A}_f = [2, +\infty)$.

(β′) Πρέπει $x^2 - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 4$. Αυτό σημαίνει $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

> Θυμόμαστε ότι $|x| \geqslant \theta \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (-\theta, \theta)$

Ταυτόχρονα όμως πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Συναληθεύοντας έχουμε τελικά ότι $\mathcal{A}_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

4. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = e^{x^2 - x}$ (β′) $g(x) = \ln\left(x^3 - 3x + 2\right)$

Λύση.

(α′) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

(β′) Πρέπει $x^3 - 3x + 2 > 0$. Παρατηρούμε όμως ότι:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$$

Συνεπώς, πρέπει $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \left(9 - x^2\right)^{\sqrt{|x|-1}}$$

Λύση. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ και όταν $|x| \geqslant 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Συναληθεύοντας έχουμε:

$$\mathcal{A}_f = (-3, -1] \cup [1, 3)$$

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f εναι το $\mathcal{A}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) \Leftrightarrow y &= \frac{3x+1}{x-2} \\ &\Leftrightarrow 3x + 1 = y(x-2) \\ &\Leftrightarrow (y-3)\,x = 2y + 1 \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το συντελεστή του x .

- Αν $y - 3 = 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0 = 7$ η οποία είναι αδύνατη.
- Αν $y - 3 \neq 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $x = \dfrac{2y+1}{y-3} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Συνεπώς, το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathcal{A}_f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

7. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$.

Λύση. Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{3x+2}{2x-5} \\ &\Leftrightarrow y\,(2x-5) = 3x+2 \\ &\Leftrightarrow (2y-3)\,x = 5y+2 \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το συντελεστή του x.

- Αν $2y - 3 = 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0 = \frac{19}{2}$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα, $\frac{3}{2} \notin f\left(\mathcal{A}_f\right)$.
- Αν $2y - 3 \neq 0$ τότε η λύση $x = \dfrac{5y+2}{2y-3}$ είναι δεκτή μόνο όταν ικανοποιεί τον περιορισμό $-2 < x < 2$. Πρέπει λοιπόν

$$\begin{aligned} -2 < \frac{5y+2}{2y-3} < 2 &\Leftrightarrow \left|\frac{5y+2}{2y-3}\right| < 2 \\ &\Leftrightarrow |5y+2|^2 < 2^2\,|2y-3|^2 \\ &\Leftrightarrow y \in \left(-8, \frac{4}{9}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f\left(\mathcal{A}_f\right) = \left(-8, \frac{4}{9}\right)$.

8. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{A}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Παρατηρούμε ότι η f παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

> Πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και στη συνέχεια απλοποιούμε τον τύπο.

Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-3} \\ &\Leftrightarrow y\,(x-3) = x+1 \\ &\Leftrightarrow (y-1)\,x = 3y+1 \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το συντελεστή του x.

- Αν $y - 1 = 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0 = 4$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα, $1 \notin f(\mathcal{A}_f)$.
- Αν $y - 1 \neq 0$ τότε η λύση $x = \dfrac{3y+1}{y-1}$ θα πρέπει να ανήκει στο $\mathcal{A}_f$. Συνεπώς,

$$\left\{\frac{3y+1}{y-1} \neq 2 \quad \text{και} \quad \frac{3y+1}{y-1} \neq 3\right\} \Leftrightarrow \{y \neq -3 \quad \text{και} \quad 1 \neq -3\}$$

Άρα, $f(\mathcal{A}_f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

9. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = 5 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$. Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = y - 5 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 5 \\ x^2 - 2x + 3 = (y-5)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 5 \\ x^2 - 2x + \left(3 - (y-5)^2\right) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Η τελευταία έχει λύση μόνο όταν

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 - 4\left(3 - (y-5)^2\right) \geqslant 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (y-5)^2 \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y & \geqslant & 5+\sqrt{2} \\ y & \leqslant & 5-\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς, $f(\mathcal{A}_f) = \left[5+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1+\eta\mu\, x}{5+4\,\sigma\upsilon\nu\, x}$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$. Θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1+\eta\mu\, x}{5+4\,\sigma\upsilon\nu\, x} \\ &\Leftrightarrow y\,(5+4\,\sigma\upsilon\nu\, x) = 1+\eta\mu\, x \\ &\Leftrightarrow \eta\mu\, x - 4y\,\sigma\upsilon\nu\, x = 5y-1 \end{aligned}$$

Όμως,

$$\alpha\,\eta\mu\, x + \beta\,\sigma\upsilon\nu\, x = \rho\,\eta\mu\,(x+\varphi)$$

όπου $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και $\begin{cases} \eta\mu\,\varphi & = & \dfrac{\beta}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi & = & \dfrac{\alpha}{\rho} \end{cases}$.

Συνεπώς,

$$\rho\,\eta\mu\,(x+\varphi) = 5y-1 \Leftrightarrow \eta\mu\,(x+\varphi) = \frac{5y-1}{\sqrt{1+16y^2}}$$

Από την άλλη είναι $|\eta\mu\,(x+\varphi)| \leqslant 1$, οπότε έπεται ότι

$$\begin{aligned} \left|\frac{5y-1}{\sqrt{1+16y^2}}\right| \leqslant 1 &\Leftrightarrow |5y-1| \leqslant \sqrt{1+16y^2} \\ &\Leftrightarrow (5y-1)^2 \leqslant 1+16y^2 \\ &\Leftrightarrow 9y^2-10y \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow y\left(9y-10\right)\leqslant 0\\&\Leftrightarrow 0\leqslant y\leqslant \frac{10}{9}\end{aligned}$$

Άρα, $f\left(\mathcal{A}_f\right)=\left[0,\frac{10}{9}\right]$.

11. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1-\alpha^x}{1+\alpha^x}$, $\alpha>0$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{A}_f=\mathbb{R}$. Θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}y=f(x)\Leftrightarrow y&=\frac{1-\alpha^x}{1+\alpha^x}\\&\Leftrightarrow y\left(1+\alpha^x\right)=1-\alpha^x\\&\Leftrightarrow \left(y+1\right)\alpha^x=1-y\end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $y+1=0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0=2$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα, $-1\notin f\left(\mathcal{A}_f\right)$.
- Αν $y+1\neq 0$ τότε $\alpha^x=\dfrac{1-y}{1+y}$. Όμως, $\alpha^x>0$ συνεπώς

$$\frac{1-y}{1+y}>0\Leftrightarrow \left(1-y\right)\left(1+y\right)>0\Leftrightarrow y\in\left(-1,1\right)$$

Άρα, $f\left(\mathcal{A}_f\right)=\left(-1,1\right)$.

12. Έστω $f:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$. Αν $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_2\subseteq\mathcal{A}$, να δειχθεί ότι

$$f\left(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\right)=f\left(\mathcal{A}_1\right)\cup f\left(\mathcal{A}_2\right)$$

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{rcl}f\left(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\right)&\subseteq&f\left(\mathcal{A}_1\right)\cup f\left(\mathcal{A}_2\right)\\f\left(\mathcal{A}_1\right)\cup f\left(\mathcal{A}_2\right)&\subseteq&f\left(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\right)=f\left(\mathcal{A}_1\right)\cup f\left(\mathcal{A}_2\right)$$

- Έστω $y \in f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Τότε υπάρχει $x \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathcal{A}_1$ ή $x \in \mathcal{A}_2$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathcal{A}_1$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$ ή $x \in \mathcal{A}_2$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Άρα, $y \in f(\mathcal{A}_1)$ ή $y \in f(\mathcal{A}_2)$. Δηλαδή,

$$y \in f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2)$$

Άρα,

$$f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subseteq f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2)$$

- Έστω $y \in f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2)$ τότε $y \in f(\mathcal{A}_1)$ ή $y \in f(\mathcal{A}_2)$. Δηλαδή, υπάρχει $x_1 \in \mathcal{A}_1$ με $f(x_1) = y$ ή $x_2 \in \mathcal{A}_2$ με $f(x_2) = y$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ με $f(x) = y$. Επομένως,

$$y \in f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$$

Άρα,

$$f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2) \subseteq f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $f(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2)$.

(Γενίκευση) Έστω $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Αν $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_\kappa \subseteq \mathcal{A}$ τότε

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathcal{A}_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\kappa} f(\mathcal{A}_i)$$

13. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και σε αυτό η f γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & , \quad x \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{x}{1-x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Έστω $\mathcal{A}_1 = (-\infty, 0)$ και $\mathcal{A}_2 = [0, +\infty)$. Τότε, $f(\mathcal{A}_f) = f(\mathcal{A}_1) \cup f(\mathcal{A}_2)$.

Εύρεση του $f(\mathcal{A}_1)$: Θέτουμε $y = f(x)$ με $x < 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow y\,(1-x) = x \\ &\Leftrightarrow x\,(1+y) = y \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $y + 1 = 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0 = -1$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα, $-1 \notin f\,(\mathcal{A}_1)$.
- Αν $y + 1 \neq 0$ τότε $x = \dfrac{y}{1+y}$. Η λύση αυτή είναι δεκτή όταν

$$\frac{y}{y+1} < 0 \Leftrightarrow y\,(y+1) < 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 0)$$

Άρα, $f\,(\mathcal{A}_1) = (-1, 0)$.

Εύρεση του $f(\mathcal{A}_2)$: Θέτουμε $y = f(x)$ με $x \geqslant 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \\ &\Leftrightarrow y\,(1+x) = x \\ &\Leftrightarrow (1-y)\,x = y \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $1 - y = 0$ τότε η τελευταία σχέση δίδει $0 = 1$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα, $1 \notin f\,(\mathcal{A}_2)$.
- Αν $1 - y \neq 0$ τότε $x = \dfrac{y}{1-y}$. Η λύση αυτή είναι δεκτή όταν

$$\frac{y}{1-y} \geqslant 0 \Leftrightarrow y\,(1-y) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in [0, 1)$$

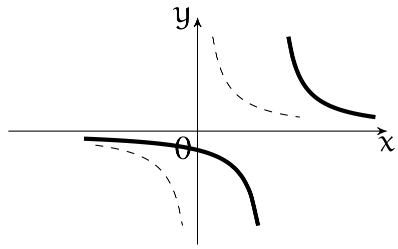
Άρα, $f\,(\mathcal{A}_2) = [0, 1)$. Τελικά,

$$f\,(\mathcal{A}_f) = f\,(\mathcal{A}_1) \cup f\,(\mathcal{A}_2) = (-1, 0) \cup [0, 1) = (-1, 1)$$

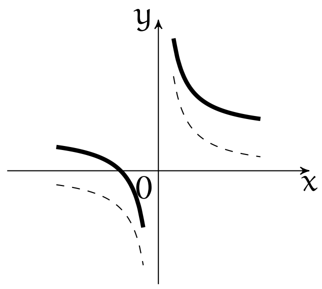
14. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση των συναρτήσεων (α′) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ (β′) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ (γ′) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 1$

Λύση.

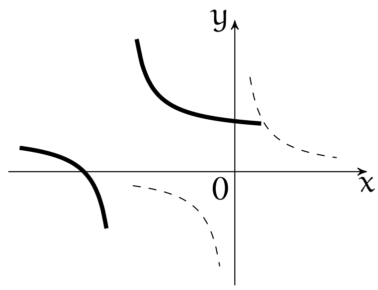
(α′) Ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση της $y = \frac{1}{x}$ και τη μετατοπίζουμε 2 μονάδες δεξιά.



(β′) Ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση της $y = \frac{1}{x}$ και τη μετατοπίζουμε προς τα επάνω 1 μονάδα.



(γ′) Ξεκινάμε από τη γραφική παράσταση της $y = \frac{1}{x}$ και αφού τη μετατοπίσουμε πρώτα 3 μονάδες αριστερά στη συνέχεια τη μετατοπίζουμε 1 μονάδα προς τα πάνω.



15. Να δειχθεί ότι:

(α′) η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2 + \text{συν}\, x$ είναι άρτια.

(β′) η συνάρτηση $g(x) = x^5 + x^3 + \text{ημ}\, x$ είναι περιττή.

Λύση.

(α′) Είναι $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + \text{συν}(-x) = x^4 + x^2 + \text{συν}\, x = f(x)$.

(β′) Είναι $g(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + \text{ημ}(-x) = -x^5 - x^3 - \text{ημ}\, x = -g(x)$.

16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία περιττή συνάρτηση. Να δειχθεί ότι $f(0) = 0$.

Λύση. Εφόσον η συνάρτηση f είναι περιττή έχουμε:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι συμμετρικό διάστημα σε αυτό περιέχεται το 0. Για $x = 0$ η (1) δίδει

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

και το αποτέλεσμα έπεται.

17. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $f(0) = 0$.

(β′) η f είναι περιττή.

Λύση.

(α′) Θέτοντας $x = y = 0$ στην (1) παίρνουμε:

$$f(0) + f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

(β′) Θέτοντας $x = -y$ στην (1) παίρνουμε:

$$f(\cancelto{0}{-y + y}) = f(-y) + f(y) \Leftrightarrow f(y) = -f(-y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

18. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x + 1 + \frac{2e^x + 2}{e^x - 1}$$

είναι συμμετρική ως προς το σημείο $A(0, 1)$.

Λύση. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$ το οποίο είναι συμμετρικό διάστημα. Αρκεί να δειχθεί ότι $f(x) + f(-x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + 1 + \frac{2e^x + 2}{e^x - 1} - x + 1 + \frac{2e^{-x} + 2}{e^{-x} - 1} \\ &= 2 + \frac{2e^x + 2}{e^x - 1} + \frac{2 + 2e^x}{1 - e^x} \\ &= 2 + \cancel{\frac{2e^x + 2}{e^x - 1} - \frac{2e^x + 2}{e^x - 1}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

και το ζητούμενο απεδείχθη.

19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $f(x + 3) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β′) η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$.

(γ′) ο αριθμός $\tau = 6$ είναι επίσης περίοδος της f.

Λύση.

(α′) Θέτουμε $x \mapsto x + 1$ στην (1) και παίρνουμε:

$$\begin{gathered} f(x + 1) + f(x + 2) + f(x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ f(x + 3) = -f(x + 1) - f(x + 2) \quad \Leftrightarrow \\ f(x + 3) = f(x) \end{gathered}$$

(β′) Εφόσον $f(x + 3) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$.

(γ′) Παρατηρούμε ότι $\tau = 6 = 2 \cdot 3$ άρα το 6 είναι επίσης περίοδος της f.

20. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) \neq 0, 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x + 1) = \frac{1}{1 - f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι περιοδική με $T = 3$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x+2) = \frac{1}{1-f(x+1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}} = \frac{1}{\frac{1-f(x)-1}{1-f(x)}} = \frac{f(x)-1}{f(x)}$$

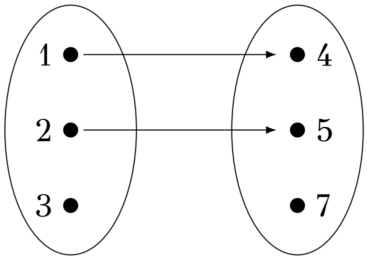
Οπότε,

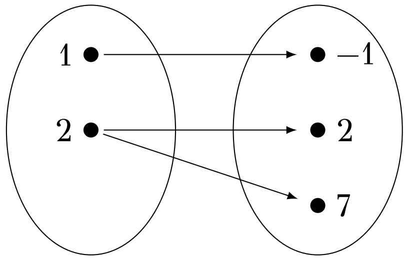
$$f(x+3) = \frac{1}{1-f(x+2)} = \frac{1}{1-\frac{f(x)-1}{f(x)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x)+1}{f(x)}} = f(x)$$

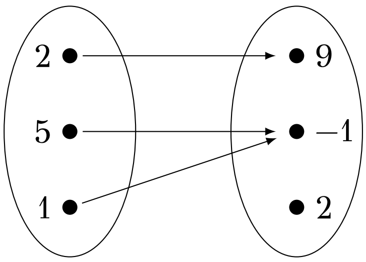
Άρα, η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$.

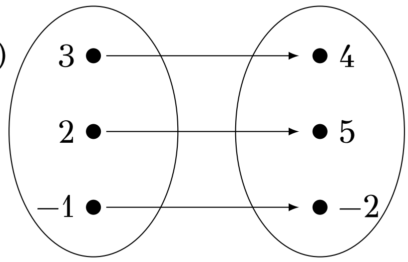
Προτεινόμενες ασκήσεις

1.1. Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω βελοδιαγράμματα παριστάνουν συνάρτηση.

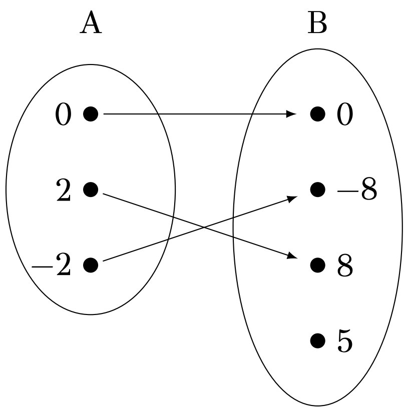
(i)


(ii)


(iii)


(iv)


1.2. Έστω η συνάρτηση f που παριστάνεται με το παρακάτω βελοδιάγραμμα.



(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να υπολογιστούν οι τιμές $f(2)$, $f(-2)$.

(γ′) Διέρχεται η $\mathcal{C}_f$ από την αρχή των αξόνων; Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

(δ′) Ποιο είναι το σύνολο αφίξεως της f και ποιο το σύνολο τιμών αυτής;

1.3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = x^3 - 5x + 6$

(β′) $f(x) = 2x^2 - 7x + 13$

(γ′) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-8}$

(δ′) $f(x) = \dfrac{3x+2}{12+4x}$

(ε′) $f(x) = \sqrt{3x+6}$

(ϛ′) $f(x) = \sqrt{10-5x}$

(ζ′) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3-3x+2}$

(η′) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(θ′) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$

(ι′) $f(x) = (2-x)^{\sqrt{x-1}}$

1.4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x+3}$

(β′) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+3x-4} - \dfrac{4}{x-3}$

(γ′) $f(x) = \dfrac{7x-13}{x^2+5x} - \dfrac{21}{x^2-2x-3}$

(δ′) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-3x-10}$

(ε′) $f(x) = \dfrac{5-x}{4x^2-9} + \dfrac{x-3}{x^2+4x+3}$

(ϛ′) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2x+3} + \dfrac{3x+1}{4x^2-4x+1}$

1.5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{2x^2-5|x|-3}$

(β′) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4|x|+3}$

(γ′) $f(x) = \dfrac{13-5x}{x^2-4|x|}$

(δ′) $f(x) = \dfrac{7-x}{x^2-7|x|+10}$

(ε′) $f(x) = \sqrt{|x|-6}$

(ϛ′) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

(ζ′) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{14-2|x|}}$

(η′) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{|2x-3|-5}}$

(θ′) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3x|+|x^2-9|}$

1.6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{x-3}{x(|x|-2)(x^2-16)}$

(β′) $f(x) = \dfrac{x}{(|x|-1)(x^2+2x)(x^2-9)}$

(γ′) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{(x^2-5x)(x^2-2|x|)}$

(δ′) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}}{(x^2+5x+6)(|x-3|-2)}$

1.7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-x}$

(β′) $f(x) = \dfrac{1}{x+|x|}$

(γ′) $f(x) = \sqrt{|x|-x}$

(δ′) $f(x) = \sqrt{|x|+x}$

(ε′) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$

(ς′) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+|x|}}$

1.8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = x^x$

(β′) $f(x) = (\ln x)^{1/x}$

1.9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1.10. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+2\lambda x-\lambda}{2x^2-2\lambda x+\lambda}$$

να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1.11. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = x^2-4x+3$

(β′) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

(γ′) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

(δ′) $f(x) = -\sqrt{x-2}$

(ε′) $f(x) = \dfrac{1+\text{συν}\, x}{3-\text{συν}\, x}$

(ς′) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+9}{x^2+2x-9}$

1.12. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(α′) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

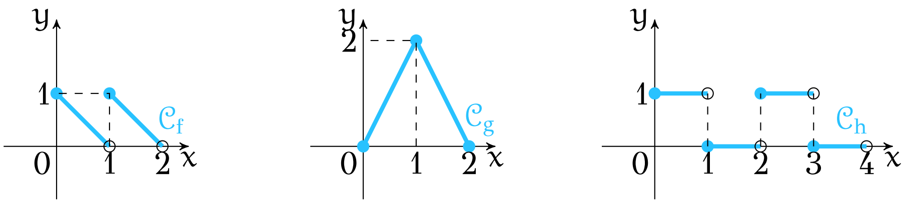
(β′) $f(x) = x-\ln(1+e^x)$

(γ′) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

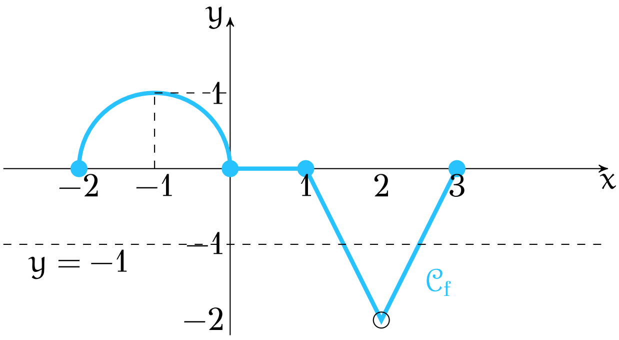
(δ′) $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

1.13. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1,2) \\ x+2, & x \in [2,4) \end{cases}$.

1.14. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις f, g, h που απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα και να βρεθούν τα σύνολα τιμών τους.



1.15. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράστασης μίας συνάρτησης f.



(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να εξετασθεί αν το -1 είναι τιμή της συνάρτησης.

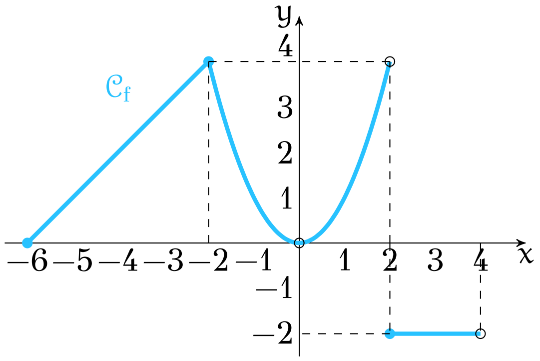
(γ′) Να βρεθεί το $f(-1)$.

(δ′) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

(ε′) Να επιλυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

(ϛ′) Να επιλυθούν οι ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.

1.16. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράστασης μίας συνάρτησης f.



(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

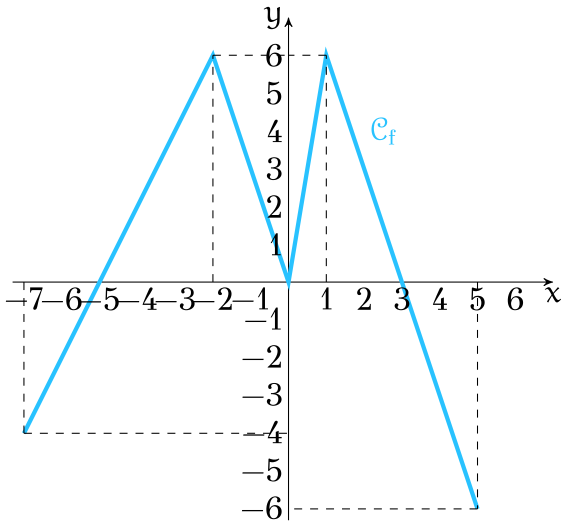
(β′) Να εξεταστεί αν το 0 είναι τιμή της συνάρτησης.

(γ′) Να βρεθεί το $f(2)$.

(δ′) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

(ε′) Να επιλυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ καθώς και η ανίσωση $f(x) < 0$.

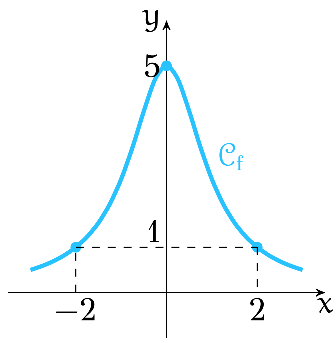
1.17. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.



Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(f(x)) = 0$.

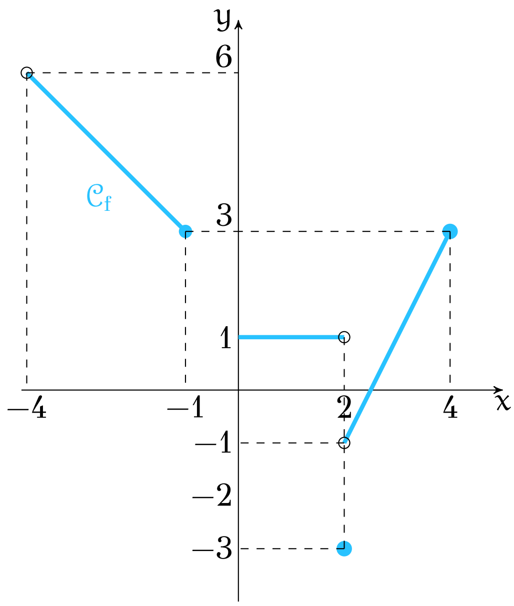
1.18. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta x^2 + 1}$$



Με βάση τα δεδομένα της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές των α, β.

1.19. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η γραφική παράσταση της οποίας απεικονίζεται παρακάτω.



(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ της συνάρτησης f.

(β′) Να βρεθεί το πεδίο τιμών $\mathcal{B}$ της συνάρτησης f.

(γ′) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(i) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία ακριβώς λύση ως προς x.

(ii) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία το πολύ λύση ως προς x.

(iii) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x.

(δ΄) Για κάθε $y \in \mathcal{B}$, να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

(i) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία ακριβώς λύση ως προς x.

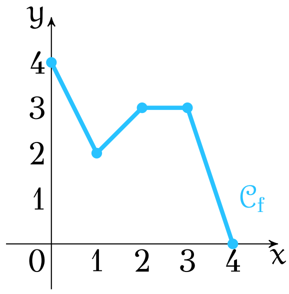
(ii) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία το πολύ λύση ως προς x.

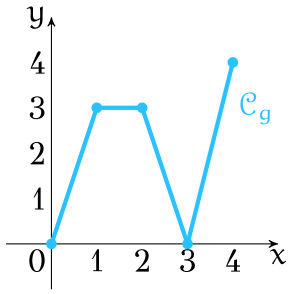
(iii) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x.

(ε΄) Υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο η εξίσωση $f(x) = y$ έχει άπειρες λύσεις ως προς x ;

(ϛ΄) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.

1.20. Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g.





Με βάση τα παραπάνω σχήμα να βρεθούν οι παρακάτω τιμές.

(α΄) $(f+g)(0)$ (γ΄) $(f-g)(1)$ (ε΄) $(fg)(2)$ (ζ΄) $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$

(β΄) $(f+g)(1)$ (δ΄) $(g-f)(2)$ (ϛ΄) $(fg)(1)$ (η΄) $\left(\frac{g}{f}\right)(2)$

1.21. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α΄) $f(x) = (x-2)^2$

(β΄) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

(γ΄) $f(x) = \frac{2}{x-1} - 2$

(δ΄) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$

(ε΄) $f(x) = \sqrt{2-x}$

(ϛ΄) $f(x) = e^{2-x} + 1$

1.22. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $|x| + |y| = 1$.

1.23. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\ln|x||$.

1.24. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x \geqslant 0 \\ x^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$.

(α΄) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\Pi = f(0) - 3f(-1) + 2f(2) - f(-3)$$

(β′) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

1.25. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων f, g για τις οποίες ισχύει

$$f(x) + 1 = g(x) + e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1.26. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & , \ |x| \leqslant 1 \\ \alpha x & , \ |x| > 1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν $f(2) = 4$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

1.27. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

(α′) Να βρεθούν οι τιμές $f(3)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f(0)$ και $f(\pi)$.

(β′) Να λυθεί η εξίσωση $|f(2004) - x| = f\left(\sqrt{3}\right)$.

(γ′) Για τη μικρότερη τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα (β') να λυθεί η ανίσωση $|x - \alpha| < f(\pi)$.

1.28. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Να δειχθεί ότι $f(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.29. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α′) Να δειχθεί ότι $f(x) + f(1 - x) = 1$.

(β′) Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\mathcal{S} = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{2023}{2023}\right)$$

1.30. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}$. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\Pi = f(1)f(2)\cdots f(2014)$.

1.31. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές.

Η συνάρτηση αυτή καλείται *συνάρτηση Dirichlet*. Είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα παθογενούς συνάρτησης και θα τη συναντήσουμε και παρακάτω καθώς δίδει εξαιρετικά αντιπαραδείγματα.

(α′) $f(x) = x^3 - 4x$ (β′) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

1.32. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

(α′) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1 - \text{συν}\, 2x}$ (β′) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

1.33. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)$.

(α′) Να δειχθεί ότι $\mathcal{A}_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(β′) Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

1.34. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2^x+1}{2^x-1}$ είναι περιττή.

1.35. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή.

1.36. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad x \leqslant 0 \\ x+1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ είναι άρτια.

1.37. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x+1| & , \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ |x-1| & , \quad 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$ είναι άρτια.

1.38. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \left(9+\sqrt{80}\right)^x + \left(9-\sqrt{80}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(α′) Να δειχθεί ότι η f είναι άρτια.

(β′) Να δειχθεί ότι $f(x) \geqslant 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.39. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

1.40. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:

(α′) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια.

(β′) η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή.

(γ′) κάθε συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης. 📢

📢Αυτή είναι μία βασική πρόταση όχι μόνο στην Ανάλυση αλλά και στην Άλγεβρα. Μάλιστα ισχύει κάτι περισσότερο· το άθροισμα αυτό είναι ευθύ.

1.41. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Να γραφεί η συνάρτηση ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης. 📢

1.42. Να δειχθεί ότι αν μία συνάρτηση είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή τότε αυτή είναι η μηδενική.

1.43. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$x[f(x) + f(-x) + 2] + 2f(-x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(α′) Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

(β′) Να βρεθεί ο τύπος της f.

1.44. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

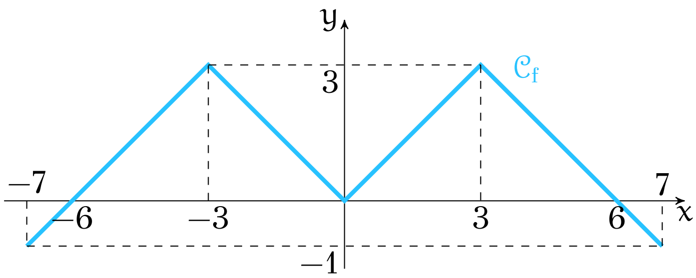
$$(\nu + 1)\, f(x) + \nu f(-x) = x^{2\nu+1} \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(α′) να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

(β′) να βρεθεί ο τύπος της f.

(γ′) να βρεθούν τα κοινά σημεία της f με την ευθεία $y = x$.

1.45. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.



(α′) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

(γ′) Είναι άρτια η f; Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

(δ′) Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

📢 **Υπόδειξη:** Πολλαπλασιάστε πάνω κάτω με το $x - 1$.

1.46. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια και περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 3$. Αν $f(1) = 0$, να βρεθεί το $f(2)$.

1.47. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5) \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι περιοδική.

1.48. Να βρεθεί η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = |\eta\mu\, x| + |\sigma\upsilon\nu\, x|$.

Γενικές ασκήσεις

1.49. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ καθώς και οι σχέσεις:

$$f(x+5) \geqslant f(x) + 5$$

$$f(x+1) \leqslant f(x) + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το $f(2023)$.

1.50. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f\left(f(x)\right) = 3x^3 - x \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Αν είναι γνωστό ότι $f(0) \in \mathbb{Z}$, να βρεθεί η τιμή του.

1.51. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$f(\nu) = \nu! = 1 \cdot 2 \cdots (\nu - 1) \cdot \nu \tag{1}$$

(α′) Να υπολογιστούν οι τιμές $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ και $f(7)$.

(β′) Να δειχθεί ότι $f(\nu+1) = (\nu+1)f(\nu)$.

(γ′) Να απλοποιηθεί η τιμή $\dfrac{f(\nu+2)}{f(\nu)}$.

1.52. (α′) Είναι το άθροισμα δύο περιοδικών συναρτήσεων περιοδική συνάρτηση; Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

Η συνάρτηση αυτή καλείται **παραγοντικό**.

(β′) Έστω f, g περιοδικές συναρτήσεις με κοινή περίοδο T. Αν η $f + g$ είναι περιοδική, τότε αυτή έχει περίοδο T; Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

1.53. (α′) Αν $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με θεμελιώδη περίοδο $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i f_i(x)$$

όπου a_i είναι σταθερές, είναι περιοδική αν υπάρχει ο $\mathrm{lcm}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$.

(β′) Με βάση το παραπάνω να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu\, x + \eta\mu\, \pi x$ δεν είναι περιοδική.

1.54. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(\alpha - x) = f(\alpha + x) \tag{1}$$

$$f(\beta - x) = f(\beta + x) \tag{2}$$

όπου α, β θετικές σταθερές. Να δειχθεί ότι η f είναι περιοδική.

1.55. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } \ x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(α′) Να δειχθεί ότι $f(0) = 0$.

(β′) Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

1.56. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ και έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

1.57. Για τη συνάρτηση $f(x) = -3x + 2$ να δειχθεί ότι:

$$f(2\alpha) + f(4\beta) = 2f(\alpha + 2\beta)$$

1.58. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$ να δειχθεί ότι:

$$f(2\alpha) + f(2\beta) \geqslant 2f(\alpha + \beta)$$

1.59. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$, να δειχθεί ότι:

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geqslant 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

1.60. Για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(\alpha + \beta) = f(\alpha\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2$, να υπολογιστεί η τιμή $f(2023)$.

1.61. Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \leqslant x \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } \ x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(α′) Να βρεθεί το $f(0)$.

(β′) Να δειχθεί ότι $f(x) = x$.

1.62. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \quad \text{για κάθε } \ x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

1.63. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta) \quad \text{για κάθε } \ \alpha, \beta \in (0, +\infty) \tag{1}$$

(α′) Να εκφραστούν συναρτήσει του $f(\alpha)$ οι αριθμοί $f\left(\alpha^2\right)$, $f\left(\alpha^3\right)$ και $f\left(\sqrt{\alpha}\right)$.

(β′) Να δειχθεί ότι $f(1) = 0$.

(γ′) Να εκφραστεί συναρτήσει του $f(\alpha)$ το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(δ′) Αν $f(10) = 1$, να υπολογιστούν οι τιμές $f(100)$, $f(0.1)$, $f(1000)$ και $f(\sqrt{10})$.

(ε′) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να δειχθεί ότι $f(\alpha^\nu) = \nu f(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$.

1.64. Δίδεται η μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ τέτοια ώστε

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε} \;\; x, y \in \mathbb{R}^* \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $f(1) = 1$ (β′) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$ (γ′) $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

1.65. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε} \;\; x \in \mathcal{A} \tag{1}$$

(α′) Αν είναι $\dfrac{f^4(x)}{\alpha} + \dfrac{g^4(x)}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha + \beta \neq 0$, να δειχθεί ότι

$$\frac{f^8(x)}{\alpha^3} + \frac{g^8(x)}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha + \beta)^3}$$

(β′) Να δειχθεί ότι $|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.