ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 1

Στο κεφάλαιο αυτό θα έρθουμε σε μία πρώτη γνωριμία με τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μία επέκταση των πραγματικών αριθμών με την εισαγωγή του στοιχείου i για το οποίο ισχύει $i^2 = -1$. Κάθε αριθμός στο σύνολο αυτό γράφεται στη μορφή $\alpha + i\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Θα δούμε το μέτρο του μιγαδικού, τη πολική μορφή αυτού καθώς επίσης και τις νιοστές ρίζες τις μονάδος.

1.1 Η έννοια του μιγαδικού αριθμού

Το σύνολο $\mathbb{C}$ (complex) είναι ένα υπερσύνολο των πραγματικών αριθμών όπου σε αυτό μεταφέρονται οι ιδιότητες που ισχύουν στο $\mathbb{R}$ πλην της διατάξεως. Για παράδειγμα αν z ένα στοιχείο που ανήκει στο σύνολο $\mathbb{C}$ τότε για αυτό **δε μπορεί να ισχύουν** οι παρακάτω σχέσεις

- $z \leq 0$
- $z \geq \frac{1}{2}$

Αποτελείται από τα εξής σύνολα:

(α′) Το σύνολο $\mathbb{R}$ που είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και ,

(β′) Το σύνολο $\mathbb{I}$ που είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι οι παρακάτω:

(α′) Ισχύουν οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που ισχύουν και στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

(β′) Υπάρχει ένα ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το 0, για το οποίο ισχύει $z + 0 = 0 + z = z$.

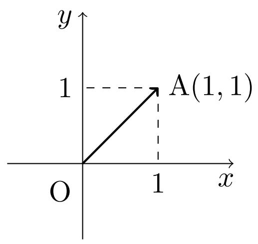
(γ′) Υπάρχει ένα ουδεύτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού , το 1 , για το οποίο ισχύει $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

(δ′) Υπάρχει ένα *στοιχείο* , το i ,για το οποίο ισχύει $i^2 = -1$.

(ε′) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχουν **μοναδικά** $a, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = a + i\beta$.

Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ καλούνται **μιγαδικοί αριθμοί**. Κάθε μιγαδικός αριθμός αποτελείται από δύο μέρη: το πραγματικό και το φανταστικό. Το a καλείται πραγματικό μέρος του μιγαδικού z και συμβολίζεται ως $a = \mathfrak{Re}(z)$ ενώ το β καλείται φανταστικό μέρος του μιγαδικού z και συμβολίζεται ως $\beta = \mathfrak{Im}(z)$.

Μπορούμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στο μιγαδικό επίπεδο (ή επίπεδο Argand ή Gauss) μέσω της διανυσματικής τους ακτίνας χωρίς όμως να γίνεται ταύτιση της ακτίνας με το μιγαδικό. Έτσι για παράδειγμα ο μιγαδικός $z = 1 + i$ παρίσταται με το σημείο $\mathrm{A}(1, 1)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 1

Όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω σχήμα (Σχήμα 1) ο άξονας $x'x$ καλείται **πραγματικός άξονας** ενώ ο άξονας $y'y$ **φανταστικός άξονας**.

1.2 Πράξεις μεταξύ μιγαδικών

Μεταξύ των μιγαδικών μπορούμε να ορίσουμε πράξεις. Έτσι έχουμε:

Θεώρημα 2.1

Έστω $z_1 = a + i\beta$ και $z_2 = \gamma + i\delta$. Τότ:

(α′) $z_1 + z_2 = (a + \gamma) + i(\beta + \delta)$

(β′) $z_1 - z_2 = (a - \gamma) + i(\beta - \delta)$

(γ′) $z_1 \cdot z_2 = (a\gamma - \beta\delta) + i(a\delta + \beta\gamma)$

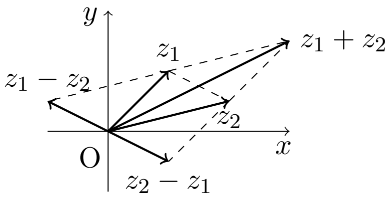
(δ′) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + i\frac{\beta\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}$ με τη προϋπόθεση ότι $z_2 \neq 0$.

Απόδειξη. Οι πρώτες τρεις ιδιότητες είναι απλές πράξεις που αφήνονται στον αναγνώστη. Για το πηλίκο δύο μιγαδικών έχουμε:

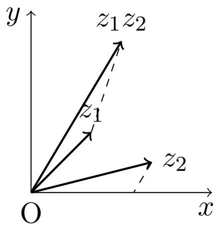
$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + i\beta}{\gamma + i\delta} \\ &= \frac{(a + i\beta)(\gamma - i\delta)}{(\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)} \\ &= \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i\frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\end{aligned}$$

Ο μιγαδικός $\gamma - i\delta$ που πολλαπλασιάσαμε καλείται **συζυγής μιγαδικός** και συμβολίζεται ως $\bar{z}$. ♦

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τις παραπάνω πράξεις.Για παράδειγμα έστω z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε:



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Όπως βλέπουμε από τα σχήματα παραπάνω η πρόσθεση μιγαδικών γίνεται με το κανόνα του παραλληλογράμμου. Στο πολλαπλασιασμό τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν είναι *όμοια*.

Θεώρημα 2.2 (*Δυνάμεις του i*)

Έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$i^\nu = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad \upsilon = 0 \\ i & \text{αν} \quad \upsilon = 1 \\ -1 & \text{αν} \quad \upsilon = 2 \\ -i & \text{αν} \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

όπου υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 4.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος παραλλείπεται. ♦

Παρόμοια ορίζονται και όλες οι δυνάμεις του z και σε αυτές ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες που ισχύουν στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

(α′) Στο $\mathbb{C}$ όπως και στο $\mathbb{R}$ ισχύουν οι ίδιοι τύποι που δίδουν το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(β′) Αν και στο $\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

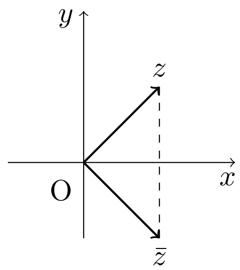
$$a^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow a = \beta = 0$$

εντούτοις στο $\mathbb{C}$ δεν ισχύει διότι όπως είπαμε σε αυτό δε μεταφέρεται η ιδιότητα της διάταξης. *Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα ;*

(γ′) Όλες οι ταυτότητες που ισχύουν στο $\mathbb{R}$ ισχύουν και στο $\mathbb{C}$.

1.3 Ο συζυγής μιγαδικός

Ο συζυγής μιγαδικός όπως είδαμε είναι πολύ σημαντικός και συμβολίζεται με $\bar{z}$. Έτσι αν $z = a + i\beta$ τότε $\bar{z} = a - i\beta$. Βγαίνει , λοιπόν , το συμπέρασμα πως οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών είναι συμμετρικές ως προς τον πραγματικό άξονα , δηλ. το άξονα $x'x$ όπως φαίνεται και από το σχήμα.



Σχήμα 4

Κάποιες από τις σημαντικότερες ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών είναι οι εξής:

(α′) $z\bar{z} = (a + i\beta)(a - i\beta) = a^2 + \beta^2$

(β′) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ και γενικότερα $\overline{\sum_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \bar{z}_\kappa$.

(γ′) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ και γενικότερα $\overline{\prod_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa} = \prod_{\kappa=1}^{\nu} \bar{z}_\kappa$

(δ′) $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

(ε′) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ \ z_2 \neq 0$

(ς′) $z + \bar{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$ καθώς και $z - \bar{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$ (*η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη*)

(ζ′) Ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

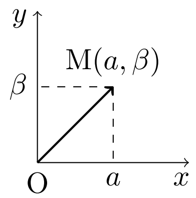
Είναι προφανές πως δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα αντίστοιχα. Επίσης , ένας μιγαδικός είναι ίσος με το 0 αν και μόνο αν τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό είναι ίσο με το 0.

Παρατήρηση: Σημειώσατε δύο πολύ σημαντικές ταυτότητες:

$$(1 + i)^2 = 2i \quad , \quad (1 - i)^2 = -2i$$

1.4 Μέτρο μιγαδικού

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $\mathrm{M}(a, \beta)$ η εικόνα αυτού. Καλούμε **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z και το συμβολίζουμε με $|z|$ την απόσταση του M από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 5

Έτσι λοιπόν το μέτρο του μιγαδικού z δίδεται του τύπου:

$$|z| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$

Είναι επίσης φανερό πως $|z| \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει όταν $z = 0$.

Μερικές από τις ιδιότητες του μέτρου είναι οι ακόλουθες:

(α′) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(β′) $|z|^2 = z\bar{z}$ και $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$.

(γ′) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ και γενικότερα $\left|\prod\limits_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa\right| = \prod\limits_{\kappa=1}^{\nu} |z_\kappa|$

(δ′) $|z^\nu| = |z|^\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}^*$ με $z \neq 0$.

(ε′) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ με $z_2 \neq 0$.

Να σημειώσουμε εδώ ότι η ισότητα $|z|^2 = z^2$ ισχύει μόνο αν $z \in \mathbb{R}$. Γενικά στο $\mathbb{C}$ η ισότητα αυτή δεν ισχύει. Για παράδειγμα είναι $i^2 = -1$ ενώ $|i|^2 = 1$.
Αντίστοιχα η ισότητα $|z|^2 = -z^2$ ισχύει αν $z \in \mathbb{I}$.

Όπως στους πραγματικούς, έτσι και στους μιγαδικούς ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Εφόσον το $|z - w|$ δηλώνει την απόσταση των z, w μπορούμε να αποδείξουμε σχετικά εύκολα την επόμενη πρόταση:

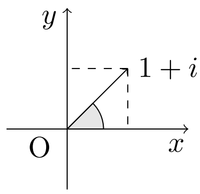
Θεώρημα 2.3 (***Τριγωνική ανισότητα*** **)**

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Η παραπάνω ανισότητα εκφράζει ότι σε ένα τρίγωνο, το μήκος κάθε πλευράς είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των άλλων δύο πλευρών, καθώς και μεγαλύτερο από τη διαφορά τους. Αυτό ακριβώς δικαιολογεί και το όνομά της.

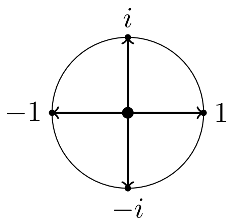
1.5 Όρισμα μιγαδικού

Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού είναι η γωνία θ που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα $x'x$. Συμβολίζεται ως $\arg z$. Απ΄ όλα τα ορίσματα του z υπάρχει ένα (και είναι μοναδικό) το οποίο βρίσκεται εντός του διαστήματος $[-\pi, \pi)$. Αυτό καλείται **πρωτεύον όρισμα** και συμβολίζεται ως $\mathrm{Arg} z$. Κάθε άλλο όρισμα διαφέρει από το πρωτεύον κατά $2\kappa\pi$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 6

Στο σχήμα 6 πάνω βλέπουμε τη γωνία που σχηματίζει ο μιγαδικός $z = 1 + i$ με τον άξονα $x'x$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πρωτεύον όρισμα είναι ίσο με $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$. Επίσης εύκολα μπορούμε να βγάλουμε τα ορίσματα των μιγαδικών $z = 1,\ z = i,\ z = -1,\ z = -i$.



Σχήμα 7

Για το όρισμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α′) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ διότι:

$$\begin{aligned}
\arg(zw) &= \arg\left(|z|\, e^{i\theta_z}|w|e^{i\theta_w}\right) \\
&= \arg\left(e^{i\theta_z}e^{i\theta_w}\right) \\
&= \arg\left(e^{i(\theta_z+\theta_w)}\right) \\
&= \arg z + \arg w
\end{aligned}$$

και γενικότερα

$$\arg(z_1 z_2 z_3 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 + \cdots + \arg z_n$$

(β′) Από τη παραπάνω γενίκευση έχουυμε ότι:

$$\arg z^{\nu} = \nu \arg z$$

(γ′) Για το όρισμα του z^{-1} έχουμε:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} 2\pi - \operatorname{Arg}(z) & \text{αν} \quad \operatorname{Arg}(z) \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad \operatorname{Arg}(z) = 0 \end{cases}$$

Από την απόδειξη παραπάνω για την ισότητα των δύο ορισμάτων είδαμε πως ο z μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = |z|e^{i\theta}$ ή την ισοδύναμη μορφή

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Η γραφή αυτή είναι πολύ βολική ιδίως όταν κάνουμε πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το μιγαδικό $z = 1 + i$ και τον $w = 1 - i$ τότε έχουμε:

$$zw = (1+i)(1-i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2e^{i(\pi/4-\pi/4)} = 2$$

ενώ για τη διαίρεση βγάζουμε αντίστοιχα $\frac{z}{w} = i$.

1.6 Τριγωνομετρική / Πολική μορφή μιγαδικού

Είδαμε πάνω πως κάθε μιγαδικός z μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

όπου θ ένα όρισμα του μιγαδικού αυτού. Η μορφή αυτή καλείται *τριγωνομετρική* ή *πολική* και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Έτσι για παράδειγμα αν $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ και $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ τότε εύκολα μπορούμε να βρούμε το γινόμενο αλλά και το πηλίκο των δύο αυτών μιγαδικών. Για το γινόμενο έχουμε για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\, e^{i\theta_1}\, |z_2|\, e^{i\theta_2} \\ &= |z_1|\, |z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ &= |z_1|\, |z_2|\, [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται:

$$\frac{z_1}{z_2} = |z_1|\, |z_2|\, [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

Γενίκευση: Για το πολλαπλασιασμό ν μιγαδικών ισχύει :

$$\begin{aligned}\prod_{\kappa=1}^{\nu} z_\kappa &= \prod_{\kappa=1}^{\nu} |z_\kappa|\, e^{\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} \theta_\kappa} \\ &= \prod_{\kappa=1}^{\nu} |z_\kappa| \left[\cos\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\theta_\kappa\right) + i\sin\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\theta_\kappa\right)\right]\end{aligned}$$

Έτσι για παράδειγμα για να πολλαπλασιάσουμε τους μιγαδικούς $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ αρκεί να τους γράψουμε στη πολική μορφή. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (1+i)\,(1-i) \\ &= \sqrt{2}e^{i\pi/4}\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \\ &= 2e^0 \\ &= 2\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

(α′) Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού z_1 με το μιγαδικό z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας τουz_1 κατά γωνία θ_2 και μετά πολλαπλασιασμό αυτής με το μέτρο του z_2. Ειδικότερα ο πολλαπλασιασμός του z με το i σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z κατά $90°$. (γιατί ·)

(β′) Η διαίρεση του μιγαδικού z_1 με το μιγαδικό z_2 σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και στη συνέχεια πολλαπλασιασμό αυτής με $\frac{1}{|z|_2}$.

Θεώρημα 2.4 (*De Moivre*)

Αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ τότε:

$$z^\nu = |z|^\nu(\cos\nu\theta + i\sin\nu\theta)$$

Απόδειξη. Πράγματι αν $z = |z|e^{i\theta}$ τότε:

$$\begin{aligned}z^\nu &= \left(|z|\, e^{i\theta}\right)^\nu \\ &= |z|^\nu\, e^{i\nu\theta} \\ &= |z|^\nu\,(\cos\nu\theta + i\sin\nu\theta)\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ♦

1.7 Ρίζες της μονάδος

Όπως είναι γνωστό στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ο αριθμός 1 έχει μία ν - οστή ρίζα αν ο ν είναι περιττός και δύο ν - οστές ρίζες αν ο ν είναι άρτιος (την 1 και την -1). Στο $\mathbb{C}$ αυτό δεν ισχύει μιας και ο αριθμός 1 έχει στο $\mathbb{C}$ ακριβώς ν ρίζες.

Θεώρημα 2.5 (***Ρίζες μιγαδικού αριθμού***)

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ έχει ν διαφορετικές μιγαδικές ν -οστές ρίζες οι οποίες δίδονται της τριγωνομετρικής μορφής

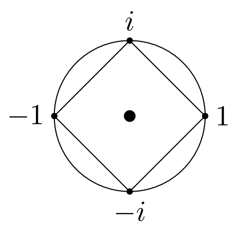
$$\rho_\kappa = \sqrt[\nu]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)\right]$$

όπου $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ και θ η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα.

Απόδειξη. Η απόδειξη παραλείπεται. ♦

Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι όλες οι νιοστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και η γωνία που σχηματίζεται από το 0 μεταξύ διαφορετικών ριζών είναι πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{\nu}$. Συνεπώς οι ν - οστές ρίζες βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου.

Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε τη τέταρτη ρίζα του 1 πάνω από το $\mathbb{C}$. Εύκολες διαπιστώνουμε ότι οι τέταρτες ρίζες του 1 πάνω από το $\mathbb{C}$ (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα) είναι οι αριθμοί $1, i, -1, -i$ και είναι κορυφές τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 8

Ανάλογο συμπέρασμα με το παραπάνω προκύπτει και τις ρίζες των πολυωνύμων πάνω από το $\mathbb{C}$. Συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.6 (*Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*)

Έστω

$$\mathrm{P}(z) = \alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

ένα μη σταθερό βαθμού ν πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Οι ρίζες του πολυωνύμου , συμπεριλαμβανομένου των πολλαπλοτήτων τους, είναι ακριβώς ν.

Απόδειξη. Η απόδειξη παραλείπεται. ♦

Για παράδειγμα ας επιλύσουμε την εξίσωση $z^3 + i = 0$. Παρατηρούμε ότι $i = (-i)^3$ οπότε:

$$\begin{aligned}
z^3 + i = 0 &\Leftrightarrow z^3 + (-i)^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow z^3 - i^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z - i)\left(z^2 + iz + i^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z - i)\left(z^2 + iz - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (z - i)\left(z + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε έχει ακριβώς 3 ρίζες. Κλείνουμε τη παράγραφο αυτή κάνοντας μία σύντομη αναφορά στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι ο τύπος που δίδει τις ρίζες του τριωνύμου στο $\mathbb{R}$ εξακολουθεί να ισχύει και εδώ με μία μικρή διαφορά.

$$\begin{aligned}
\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 &\Leftrightarrow \alpha z^2 + \beta z = -\gamma \\
&\Leftrightarrow \alpha\left(z^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) = -\gamma \\
&\Leftrightarrow \alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha} - \gamma \\
&\Leftrightarrow \alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} \\
&\Leftrightarrow (2\alpha)^2\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \\
&\Leftrightarrow (2\alpha z + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma
\end{aligned}$$

Ο αριθμός στο δεξί μέλος καλείται διακρίνουσα του τριωνύμου Δ και όπως είναι γνωστό συμβολίζεται με Δ και αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ενώ αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα. Αν $\Delta < 0$ τότε η διακρίνουσα μπορεί να γραφεί $\Delta = i^2|\Delta|$ και άρα στους μιγαδικούς το τριώνυμο έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες και δίδονται του τύπου:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \quad \textit{και} \quad z_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$$

Για παράδειγμα ας λύσουμε την εξίσωση

$$z^2 - z + 1 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -3$. Συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι (συζυγείς) μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ και $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1.8 Λυμένες Ασκήσεις

1. Να γραφεί ο μιγαδικός

$$z = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

στη μορφή $z = a + i\beta$.

Λύση. *Διαδοχικά έχουμε:*

$$\begin{aligned} z = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} &= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^2}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{1} \\ &= \cos 2\theta - i\sin 2\theta \end{aligned}$$

Σχόλιο: *Μπορούμε να φτάσουμε στο ακριβώς ίδιο συμπέρασμα αν γράψουμε τον αριθμητή ως $z = e^{-i\theta}$ και το παρανομαστή ως $w = e^{i\theta}$.* ♦

2. Να βρεθεί η σχέση που ικανοποιούν οι $z, w \in \mathbb{C}$ αν ισχύει η σχέση $z^2 + w^2 = 0$.

Λύση. *Είναι*

$$z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - i^2w^2 = 0 \Leftrightarrow (z - iw)(z + iw) = 0$$

Άρα θα είναι $z = iw$ ή $z = -iw$. ♦

3. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ να δειχθεί ότι:

$$\left(\frac{\lambda + i}{1 - i\lambda}\right)^{4\nu} + \left(\frac{i - \lambda}{1 + i\lambda}\right)^{4\nu} = 2$$

Λύση. *Έχουμε διαδοχικά:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda + i}{1 - i\lambda}\right)^{4\nu} + \left(\frac{i - \lambda}{1 + i\lambda}\right)^{4\nu} &= \left(\frac{(\lambda + i)(1 + i\lambda)}{1 + \lambda^2}\right)^{4\nu} + \left(\frac{(i - \lambda)(1 - i\lambda)}{1 + \lambda^2}\right)^{4\nu} \\ &= \left(\frac{\cancel{\lambda} + i\lambda^2 + i - \cancel{\lambda}}{1 + \lambda^2}\right)^{4\nu} + \left(\frac{i + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + i\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right)^{4\nu} \\ &= (i)^{4\nu} + (i)^{4\nu} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθει. ♦

4. Έστω η συνάρτηση $f(z) = iz^2 - \bar{z} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι:

$$\mathfrak{Re}\left(f(z)\right) = -\mathfrak{Re}(z) \cdot (2\mathfrak{Im}(z) + 1)$$

(β΄) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $f(z) \in \mathbb{I}$.

Λύση. *(α΄) Διαδοχικά έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}\left(f(z)\right) &= \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(iz^2 - \bar{z} - \overline{iz}^2 - z\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[i\left(z^2 - \bar{z}^2\right) - (z + \bar{z})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[i\left(z - \bar{z}\right)\left(z + \bar{z}\right) - (z + \bar{z})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right)\left[i\left(z - \bar{z}\right) - 1\right] \\
&= -\mathfrak{Re}(z)\left(2\mathfrak{Im}(z) + 1\right) \quad (*)
\end{aligned}$$

(β΄) Έστω $\mathcal{C}$ ο γεωμετρικός τόπος. Θέτουμε $z = x + iy$ και άρα $M(x, y)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε:

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left(f(z)\right) = 0& \\
&\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} -\mathfrak{Re}(z)\left(2\mathfrak{Im}(z) + 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) = 0 \quad \textit{ή} \quad \mathfrak{Im}(z) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \textit{ή} \quad y = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι είτε ο άξονας $y'y$ είτε η ευθεία $y = -\frac{1}{2}$. ♦

5. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1| = |z_2| = 1$. Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $w = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός.

Λύση. *Αρκεί να δείξουμε ότι* $\bar{w} = w$. *Πράγματι:*

$$\begin{aligned}
\bar{w} &= \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}\right)} \\
&= \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} \\
&= \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} \\
&= \frac{\frac{z_2 + z_1}{\cancel{z_1 \cdot z_2}}}{\frac{z_1 \cdot z_2 + 1}{\cancel{z_1 \cdot z_2}}} \\
&= \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2} \\
&= w
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθει. ♦

6. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών

$$z = 2\lambda + 1 - i(1 - \lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Λύση. *Είναι:*

$$\left.\begin{array}{c} x = 2\lambda + 1 \\ y = -(1 - \lambda) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda = \dfrac{x - 1}{2} \\ \lambda = y + 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1}{2} = y + 1 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z *είναι η ευθεία* $(\varepsilon) : x - 2y - 3 = 0$. ♦

7. Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ ώστε

$$\frac{z^2}{\bar{z}} + \frac{3\bar{z}^2}{z} = 4i \tag{1}$$

(α′) Να δειχθεί ότι $\bar{z}^2 = 2zi$.

(β′) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z.

(γ′) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή $|z - 3 - 2i|$.

Λύση. *(α′) Ρίχνουμε συζυγείς στην* (1) *και παίρνουμε:*

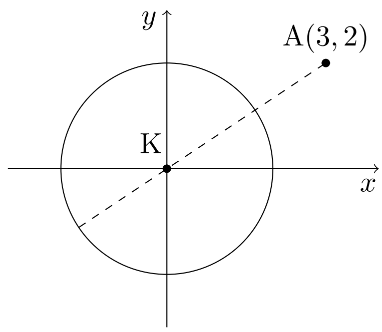
$$\begin{aligned}\overline{\frac{z^2}{\bar{z}} + \frac{3\bar{z}^2}{z}} = \overline{4i} &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}^2}{z} + \frac{3z^2}{\bar{z}} = -4i \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}^2}{z} = -\frac{3z^2}{\bar{z}} - 4i \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2}{\bar{z}} + 3\left(-\frac{3z^2}{\bar{z}} - 4i\right) = 4i \\ &\Leftrightarrow -\frac{8z^2}{\bar{z}} = -16i \\ &\Leftrightarrow \bar{z}^2 = 2zi\end{aligned}$$

(β′) Ρίχνοντας μέτρα στη προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned}\left|\bar{z}^2\right| = |2zi| &\Leftrightarrow \left|z^2\right| = 2\,|z| \\ &\overset{z\in\mathbb{C}^*}{\Leftrightarrow} |z| = 2\end{aligned}$$

οπότε οι εικόνες του μιγαδικού z *κινούνται σε κύκλο με κέντρο* $\mathrm{K}(0,0)$ *και ακτίνα* $\rho = 2$.

(γ′) Ζητάμε από την ελάχιστη απόσταση του μιγαδικού από το σημείο $\mathrm{A}(3,2)$.



Φέροντας την ευθεία η οποία περνά από το κέντρο του κύκλου και το σημείο (όπως φαίνεται στο σχήμα) βρίσκουμε $\mathrm{d}\,(\mathrm{K},\mathrm{A}) = \sqrt{13}$. *Συνεπώς η ελάχιστη απόσταση είναι ίση με* $\mathrm{d}_{\min} = \sqrt{13} - 2$. ♦

Σχόλιο: *Μπορεί να βρεθεί και η μέγιστη τιμή του μέτρου αυτού. Απλά είναι* $\mathrm{d}_{\max} = \sqrt{13} + 2$.

8. Έστω

$$f(z) = \ln|z| + i\mathfrak{Re}(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

(α′) (i) Να δειχθεί ότι: $f(\bar{z}) = f(z)$

(ii) Να δειχθεί ότι:

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}^*$$

(β′) Αν η εικόνα του z κινείται στο κύκλο $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ να δειχθεί ότι η εικόνα του $f(z)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα.

Λύση. *(α′) (i) Έχουμε διαδοχικά:*

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= \ln|\bar{z}| + i\mathfrak{Re}(\bar{z}) \\ &= \ln|z| + i\mathfrak{Re}(z) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} = f(\bar{z}) = f(z) &\Leftrightarrow \cancel{\ln|z|} - i\mathfrak{Re}(z) = \cancel{\ln|z|} + i\mathfrak{Re}(z) \\ &\Leftrightarrow 2i\mathfrak{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z) = 0 \end{aligned}$$

οπότε $z \in \mathbb{I}^*$ *αφού* $z \in \mathbb{C}^*$.

(β′) Εφόσον οι εικόνες του z ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο έχουμε ότι $|z| = 1$ άρα $f(z) = i\mathfrak{Re}(z)$. Όμως $-1 \le \mathfrak{Re}(z) \le 1$ οπότε η εικόνα της $f(z)$ κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $\mathrm{A}(0,-1)$, $\mathrm{B}(0,1)$. ♦

9. Να δειχθεί ότι:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

Λύση. *Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα έχουμε:*

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\ &= z \cdot \bar{z} + \cancel{z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z}} + w \cdot \bar{w} \cancel{- z \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{z}} + w \cdot \bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + |z|^2 + |w|^2 \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 \end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχθει. ♦

Γεωμετρική ερμηνεία: *Σε κάθε παραλληλόγραμμο το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ισούταιμε το άθροισμα των διαγωνίων του.*

10. Έστω οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$z\,(1-i)+\bar{z}\,(1+i)+2=0 \tag{1}$$

$$(w+\bar{w})\,(w-\bar{w})=4i \tag{2}$$

και $\mathfrak{Re}(w)>0$. Τότε:

(α′) Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνωντων z, w.

(β′) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Λύση. *(α′) Από τη σχέση* (1) *έχουμε διαδοχικά:*

$$\begin{aligned} z\,(1-i)+\bar{z}\,(1+i)+2=0 &\Leftrightarrow 2\mathfrak{Re}\left[z\,(1-i)\right]=-2 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left[z\,(1-i)\right]=-1 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(1-i)-\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(1-i)=-1 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z)+\mathfrak{Im}(z)+1=0 \Leftrightarrow x+y+1=0 \end{aligned}$$

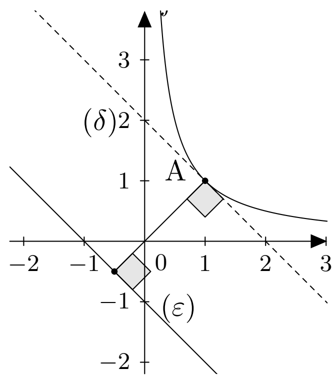
Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z είναι η ευθεία $\varepsilon : x+y+1=0$.

Από τη σχέση (2) *εύκολα βλέπουμε ότι*

$$\begin{aligned} (w+\bar{w})\,(w-\bar{w})=4i &\Leftrightarrow 2\mathfrak{Re}(w)\cdot 2\mathfrak{Im}(w)i=4i \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(w)\cdot\mathfrak{Im}(w)=1 \\ &\overset{\mathfrak{Re}(w)>0}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{Im}(w)=\frac{1}{\mathfrak{Re}(z)} \\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων w είναι η υπερβολή $y=\frac{1}{x}, \quad x>0$.

(β′) Ζητάμε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$, *δηλ.την ελάχιστη απόσταση της ευθείας από την υπερβολή.*



Η ευθεία (δ) είναι η εφαπτομένη της υπερβολής σε κάποιο σημείο A και είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε). Οπότε ο συντελεστής της ευθείας (δ) θα είναι $\lambda = -1$. Η υπερβολή είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Οπότε ψάχνω x_0 τέτοιο ώστε $y'(x_0) = -1$. Εύκολα βλέπουμε ότι $x_0 = 1$ και άρα $\mathrm{A}(1,1)$ και η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $y = -x + 2$. Άρα αναζητούμε την ελάχιστη απόσταση των δύο ευθειών η οποία είναι

$$\mathrm{d}_{\min}(\varepsilon, \delta) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

♦

11. (α′) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος $\mathcal{C}$ των εικόνων z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{1}{|z-3i|} + \frac{1}{|z+3i|} = \frac{10}{|z^2+9|} \tag{1}$$

(β′) Αν οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στον $\mathcal{C}$ και είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων O τότε να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

Λύση. *(α′) Η σχέση (1) γράφεται διαδοχικά:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{|z^2+9|} &\Leftrightarrow \frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{|z^2+9|}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{|z-3i|}+\frac{1}{|z+3i|}=\frac{10}{|z-3i|\,|z+3i|}\\
&\Leftrightarrow \frac{\cancel{|z-3i|}\,|z+3i|}{\cancel{|z-3i|}}+\frac{|z-3i|\,\cancel{|z+3i|}}{\cancel{|z+3i|}}=\\
&\qquad =\frac{10\cancel{|z-3i||z+3i|}}{\cancel{|z-3i||z+3i|}}\\
&\Leftrightarrow |z+3i|+|z-3i|=10
\end{aligned}$$

Αν $\mathrm{E}'(0,-3)$ *και* $\mathrm{E}(0,3)$ *και* M *η εικόνα του* z *τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα:*

$$(\mathrm{ME}')+(\mathrm{ME})=10$$

Είναι $(\mathrm{E}'\mathrm{E})=6<10$ *οπότε ο γεωμετρικός τόπος είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία* E' *και* E *και σταθερό άθροισμα* $2a=10\Leftrightarrow a=5$.

(β') *Έστω* $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2$ *οι εικόνες των* z_1,z_2. *Το τμήμα* $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ *είναι διάμετρος της έλλειψης . Οπότε είναι* $|z_1-z_2|=(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)$. *Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα* $y'y$. *Έτσι η μέγιστη τιμή είναι το μήκος του μεγάλου άξονα , δηλ.* 10 *και η ελάχιστη τιμή είναι το μήκος του μικρού άξονα δηλ.* 8. ♦

12. Αν $x,y\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $x-iy=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{7}\right)^{\nu}$ τότε να δειχθεί ότι

$$x^2+y^2=10^{\nu}$$

Λύση. *Ισχύει ότι:*

$$\begin{aligned}
x-iy=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{7}\right)^{\nu} &\Rightarrow |x-iy|=\left|\sqrt{3}+i\sqrt{7}\right|^{\nu}\\
&\Rightarrow x^2+y^2=10^{\nu}
\end{aligned}$$

♦

13. Να δειχθεί ότι:

$$\left(\frac{a+i}{1-ai}\right)^{2\nu}+\left(\frac{i-a}{1+ai}\right)^{2\nu}=2\,(-1)^{\nu}$$

για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ και $a\in\mathbb{R}$.

Λύση. *Έχουμε διαδοχικά:*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+i}{1-ai}\right)^{2\nu}+\left(\frac{i-a}{1+ai}\right)^{2\nu} &= \frac{(a+i)^{2\nu}(1+ai)^{2\nu}+(1-ai)^{2\nu}(i-a)^{2\nu}}{(1-ai)^{2\nu}(1+ai)^{2\nu}}\\
&= \frac{\left(\cancel{a}+ia^2+i-\cancel{a}\right)^{2\nu}+\left(i-\cancel{a}+\cancel{a}+ia^2\right)^{2\nu}}{(1+a^2)^{2\nu}}\\
&= \frac{\left[\left(a^2+1\right)i\right]^{2\nu}+\left[\left(a^2+1\right)i\right]^{2\nu}}{(1+a^2)^{2\nu}}\\
&= 2\frac{\left(a^2+1\right)^{2\nu}i^{2\nu}}{(1+a^2)^{2\nu}}\\
&= 2\left(-1\right)^{\nu}
\end{aligned}$$

♦

14. Έστω ο μιγαδικός $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. Δίδεται ο μιγαδικός

$$w=\frac{i\left(i+z\right)}{i-z}\quad,\quad z\neq i$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $w=\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}+i\,\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}$

(β′) Αν $w\in\mathbb{R}$ να βρεθεί πού ανήκει η εικόνα του z.

(γ′) Αν $z\in\mathbb{R}$ να βρεθεί πού ανήκει η εικόνα του w.

Λύση. *(α′) Είναι:*

$$\begin{aligned}
w=\frac{i(i+z)}{i-z}\overset{z=x+iy}{\Longleftrightarrow} w &= \frac{i\left(i+x+iy\right)}{i-x-iy}\\
\Leftrightarrow w &= \frac{-1+ix-y}{i-x-iy}\\
\Leftrightarrow w &= \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}
\end{aligned}$$

(β′) Εφόσον $w\in\mathbb{R}$ τότε

$$\mathfrak{Im}(w)=0\Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z είναι ο κύκλος $\mathcal{C}:x^2+y^2=1$ χωρίς το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

(γ΄) *Εφόσον $z \in \mathbb{R}$ τότε $y = 0$. Εύκολα βλέποουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$.* ♦

15. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$ και ισχύει:

$$\left|z^{\nu} + z^{\nu-1} + \cdots + z + 1\right| = \nu + 1$$

τότε να δειχθεί ότι $1 \leq |z| < 2$.

Λύση. *Έχουμε από τη τριγωνική ανισότητα*

$$\nu + 1 = \left|1 + z + \cdots + z^{\nu-1} + z^{\nu}\right| \leq 1 + |z| + \left|z^2\right| + \cdots + \left|z^{\nu-1}\right| + |z^{\nu}|$$

Η συνάρτηση $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu},\ x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$f\left(|z|\right) \geq f(1) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} |z| \geq 1$$

Ανάλογα προκύπτει και η άλλη. Η δοθείσαι γράφεται

$$\begin{aligned}\left|z^{\nu+1} - 1\right| = (\nu + 1)\left|z - 1\right| &\Rightarrow \left|z^{\nu+1}\right| - 1 \leq (\nu + 1)\left(|z| + 1\right) \\ &\Rightarrow \left|z^{\nu+1}\right| - (\nu + 1)\left|z\right| - \nu - 2 \leq 0\end{aligned}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$g(x) = x^{\nu+1} - (\nu + 1)x - \nu - 2\ ,\ x \geq 1$$

παρατηρούμε ότι g είναι γνησίως αύξουσα. Υποθέτοντας ότι $|z| \geq 2$ προκύπτει ότι $g(|z|) \geq g(2)$ απ΄ όπου έχουμε:

$$\left|z^{\nu+1}\right| - (\nu + 1)\left|z\right| - \nu - 2 \geq 2^{\nu+1} - 3\nu - 4$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε $2^{\nu+1} - 3\nu - 4 > 0$ για κάθε $\nu \geq 3$.

♦

16. Έστω κανονικό ν- γωνο ακτίνας ρ. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών και των διαγωνίων του είναι $(\nu \cdot \rho)^2$.

Λύση. *Θεωρούμε ν οποιαδήποτε σημεία $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_\nu$ και το κέντρου βάρους τους G δηλαδή το μοναδικό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι:*

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}+\overrightarrow{\mathrm{GA}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{GA}_\nu}=\vec{0} \tag{1}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{S}$ το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων όλων των $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_\nu$ (ν^2 αποστάσεις) και με $1\le\kappa\le\nu$ συμβολίζουμε με S_κ το άθροισμα των αποστάσεων του A_κ από τα $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_\nu$ (συμπεριλαμβανομένου και του A_κ) τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\kappa &= \sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{A}_\kappa\mathrm{A}_\mathrm{i}}^2\\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}^2+\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}^2-2\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}^2+\sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}-2\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}\sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}\\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}^2+\nu\overrightarrow{\mathrm{GA}_\kappa}^2
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τα $\mathcal{S}_\kappa$ βρίσκουμε ότι

$$2\mathcal{S}=2\nu\sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}^2$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\mathcal{S}^2=\left(\nu\sum_{i=1}^{\nu}\overrightarrow{\mathrm{GA}_\mathrm{i}}\right)^2 \tag{2}$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι αν $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_\nu$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου τότε το περίκεντρο που ικανοποιεί την (1) είναι το κέντρο βάρους. Έτσι, το μεν (α΄) μέλος είναι άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών και των διαγωνίων ενώ το (β΄) μέλος είναι $\nu^2\rho^2$. ♦

17. Δίδεται το πολυώνυμο

$$f(z)=z^3-(5+2i)\,z^2+(11+5i)\,z-12i \quad , \quad z\in\mathbb{C}$$

(α΄) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(z) = 0$ έχει μία φανταστική ρίζα , έστω z_1.

(β΄) Να βρεθούν οι υπόλοιπες ρίζες $z_2,\ z_3$.

(γ΄) Αν $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ οι εικόνες των ριζών στο επίπεδο τότε να δειχθεί ότι σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση. *(α΄) Έστω $z_1 = iy\ ,\ y \in \mathbb{R}$ η φανταστική ρίζα. Τότε είναι:*

$$\begin{aligned} f(iy) = 0 &\Leftrightarrow -iy^3 + (5+2i)\,y^2 + (11+5i)\,yi - 12i = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(5y^2 - 5y\right) + i\left(-y^3 + 2y^2 + 11y - 12\right) = 0 \end{aligned}$$

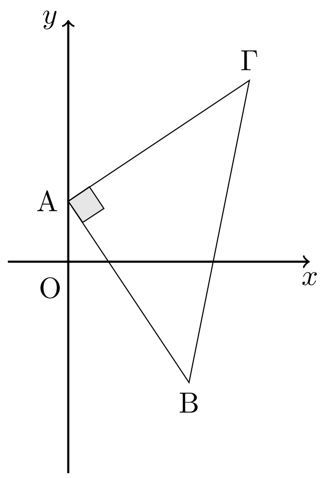
Από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν $y = 0$ και $y = 1$ αλλά μόνο η τιμή $y = 1$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις. Συνεπώς $z_1 = i$.

(β΄) Έστω

$$f(z) = (z-i)\left(z^2 + az + \beta\right) = z^3 + (a-i)\,z^2 + (\beta - ai)\,z - i\beta$$

τότε εξισώνοντας τους συντελεστές έχουμε ότι $a = -5 + i$ και $\beta = 12$. Οπότε οι άλλες δύο ρίζες θα προκύψουν από την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $z^2 - (5+i)\,z + 12 = 0$ από όπου θέτοντας $z = x + iy\ ,\ x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε τελικά ότι $z_2 = 2 - 2i$ και$z_3 = 3 + 3i$.

(γ΄) Έστω $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$ και $\Gamma(3,3)$ οι εικόνες των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο.



Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,-3)$, $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = (3,2)$ είναι κάθετα (αφήνεται ως άσκηση) καιε επιπλέον είναι

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}\right| = \sqrt{13}$$

Συνεπώς το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο. ♦

18. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$|z - |z+1|| = |z + |z-1||$$

Λύση. *Έχουμε διαδοχικά:*

$$\begin{aligned}
&|z - |z+1|| = |z + |z-1|| && \Leftrightarrow\\
&|z - |z+1||^2 = |z + |z-1||^2 && \Leftrightarrow\\
&(z - |z+1|)(\bar{z} - |z+1|) = (z + |z-1|)(\bar{z} + |z-1|) && \Leftrightarrow\\
&z\bar{z} - z|z+1| - \bar{z}|z+1| + |z+1|^2 = \\
&\qquad z\bar{z} + z|z-1| + \bar{z}|z-1| + |z-1|^2 && \Leftrightarrow\\
&|z+1|^2 - |z-1|^2 = (z+\bar{z})(|z+1| + |z-1|) && \Leftrightarrow\\
&2(z+\bar{z}) = (z+\bar{z})(|z+1| + |z-1|)
\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε:

$$(z+\bar{z})(|z+1| + |z-1| - 2) = 0$$

από όπου βγαίνουν δύο περιπτώσεις:

- $z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$
- $|z+1| + |z-1| = 2 \Leftrightarrow z \in [-1, 1]$.

Συνεπώς ο z είτε είναι καθαρός φανταστικός αριθμός είτε $z \in [-1, 1]$. ♦

19. Έστω z, w δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι:

(α′) $\mathfrak{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathfrak{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$

(β′) $\mathfrak{Re}\left(\frac{z}{z-w}\right) + i\mathfrak{Im}\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{w}}\right) = \overline{\left(\frac{z}{z-w}\right)}$

Λύση. *(α′) Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathfrak{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+w} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}+\bar{w}}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{z+w} + \frac{\bar{w}}{\bar{z}+\bar{w}}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left(\frac{z}{z-w}\right)+i\mathfrak{Im}\left(\frac{\bar z}{\bar z-\bar w}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-w}+\frac{\bar z}{\bar z-\bar w}\right)+\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar z}{\bar z-\bar w}-\frac{z}{z-w}\right)\\ &= \overline{\left(\frac{z}{z-w}\right)}\end{aligned}$$

♦

20. Δίδονται οι μιγαδικοί z, w, u για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$|z-1| = 6 \tag{1}$$

$$3zw + w = 6\bar z - 6 \tag{2}$$

$$\left(2u-\frac{1}{2}\right)\left(\bar u-\frac{1}{4}\right) = 8w\bar w \tag{3}$$

(α΄) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

(β΄) Αν ακόμα είναι $\left|z+\dfrac{1}{3}\right| = 12$ τότε να βρεθεί

(i) το $|w|$.

(ii) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων u.

Λύση. *(α΄) Η σχέση* (1) *μας λέει πως οι εικόνες του* z *κινούνται σε κύκλο* $\mathcal{C}$ *με κέντρο* $\mathrm{K}(1,0)$ *και ακτίνα* $\rho = 6$. *Οπότε η ελάχιστη τιμή του* $|z|$ *είναι* 5 *και η μέγιστη* 7.

(β΄) (i) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) *είναι*

$$3wz + w = 6\bar z - 6 \Leftrightarrow w\left(z+\frac{1}{3}\right) = 2\left(\bar z - 1\right) \Rightarrow |w| = \frac{2\cdot 6}{12} = 1$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) *καθώς και το προηγούμενο ερώτημα είναι* $\left|u-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$. ♦

21. Να δειχθεί ότι:

$$1 + 2i + 3i^3 + \cdots + \nu i^{\nu-1} = \frac{1-\nu i^{\nu}-(\nu+1)\, i^{\nu+1}}{2}$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση. *Έστω $\mathcal{S}$ το ζητούμενο άθροισμα. Πολλαπλασιάζοντας με i και τα δύο μέλη παίρνουμε*

$$i\mathcal{S} = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + \nu i^\nu$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις 2 αυτές σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\left(1-i\right) = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{\nu-1} - \nu i^\nu &\Leftrightarrow \mathcal{S}(1-i) = \frac{i^\nu - 1}{i-1} - \nu i^\nu \\ &\Leftrightarrow \mathcal{S} = \frac{i^\nu - 1 - \nu i^{\nu+1} + \nu i^\nu}{i-1} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{S} = \frac{1 - \nu i^\nu - \left(\nu+1\right) i^{\nu+1}}{2}\end{aligned}$$

♦

22. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ο αριθμός

$$w = \frac{i}{z^2+1}$$

είναι πραγματικός.

Λύση. *Καταρχάς πρέπει*

$$z^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm i$$

Έστω $z = x + iy$. Τότε $(x,y) \notin \{(0,1), (0,-1)\}$. Για να είναι ο w πραγματικός πρέπει:

$$\begin{aligned}w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w} &\Leftrightarrow -\frac{i}{\bar{z}^2+1} = \frac{i}{z^2+1} \\ &\Leftrightarrow -\left(z^2+1\right) = \bar{z}^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow -\left(x^2 - y^2 + 2xyi + 1\right) = x^2 - y^2 - 2xyi + 1 \\ &\Leftrightarrow -2x^2 + 2y^2 \cancel{-2xyi + 2xyi} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1\end{aligned}$$

Άρα

$$y^2 - x^2 = 1 \tag{1}$$

Η (1) παριστάνει ισοσκελής υπερβολή. Όμως τα σημεία $\mathrm{A}(0,1)$ *και* $\mathrm{B}(0,-1)$ *την επαληθεύουν και κατά συνέπεια πρέπει να εξαιρεθούν. Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων* z *είναι η (1) χωρίς τα σημεία* A, B. ♦

23. Δίδεται ο μιγαδικός z ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0 \tag{1}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) Οι εικόνες του z κινούνται στο μοναδιαίο κύκλο.

(β′) $\left(\dfrac{2z - iz - 2i + 1}{1 + zi}\right)^2 \leq 0$

(γ′) $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{|z+1|^2 - 2}{2}$

(δ′) $\left|z^2 - 3z + 1\right| = 5 - |z+1|^2$

Λύση. *(α′) Είναι εύκολο να δούμε πως ο μιγαδικός* z *ικανοποιεί και τη σχέση:*

$$z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \implies \left|z^9\right| = \left|\frac{11 - 10iz}{11z + 10i}\right|$$

Αν $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ *τότε η παραπάνω σχέση γράφεται ως*

$$\left(x^2 + y^2\right)^9 = \frac{121 + 220y + 100y^2 + 100x^2}{121x^2 + 121y^2 + 220y + 100}$$

Έστω ότι $x^2 + y^2 > 1$. *Η τελευταία σχέση δίδει* $x^2 + y^2 < 1$. *Όμοια και αν* $x^2 + y^2 < 1$. *Άρα* $x^2 + y^2 = 1$ *και συνεπώς οι εικόνες του* z *κινούνται στο μοναδιαίο κύκλο.*

(β′) Είναι

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Ο συζυγής του μιγαδικού $\dfrac{2z - iz - 2i + 1}{1 + zi}$ *είναι ο* $\dfrac{2 + i + 2iz + z}{z - i}$ *τον οποίο αν πολλαπλασιάσουμε « πάνω - κάτω » με το* i *μας δίδει* $-\dfrac{2z - iz - 2i + 1}{1 + zi}$. *Άρα ο εν λόγω αριθμός είναι φανταστικός, οπότε το τετράγωνό του είναι μη θετικός.*

(γʹ) *Είναι:*

$$\begin{aligned}\frac{|z+1|^2-2}{2} &= \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{2}\\ &= \frac{\cancel{|z|^2}+z+\bar{z}\cancel{+1-2}}{2}\\ &= \frac{z+\bar{z}}{2}\\ &= \mathfrak{Re}(z)\end{aligned}$$

(δʹ) *Όπως έχει δειχθεί ισχύει:*

$$|z+1|^2 = z+\bar{z}+2$$

Επίσης είναι

$$\left|z^2-3z+1\right|^2 = \left(z-\frac{1}{z}+3\right)^2$$

Οπότε $\left|z^2-3z+1\right| = |z+\bar{z}-3|$ *όπου στο δεύτερο μέλος εμφανίζεται απόλυτη τιμή αφού ο* $z+\bar{z}$ *είναι πραγματικός. Μάλιστα είναι*

$$z+\bar{z} = 2\mathfrak{Re}(z) \leq 2|z| = 2$$

Τότε

$$\left|z^2-3z+1\right| = 3-z-\bar{z}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ♦

24. Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$w = \left(\frac{3}{2}+2i\right)z-\frac{5}{2}zi$$

καθώς και $z = a+i\beta,\ a,\beta \in \mathbb{R}$.

(αʹ) Να βρεθούν τα $\mathfrak{Re}(w),\ \mathfrak{Im}(w)$.

(βʹ) Να βρεθεί το μέτρου του w.

(γʹ) Αν $|w| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ να βρεθεί πού κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z.

(δʹ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων w καθώς επίσης και η ελάχιστη απόσταση από το μιγαδικό $3+i$

Λύση. *(α΄) Είναι*

$$
\begin{aligned}
w = \left(\frac{3}{2}+2i\right)z - \frac{5}{2}zi \overset{z=a+i\beta}{\Longleftrightarrow} w &= \left(\frac{3}{2}+2i\right)(a+i\beta) - \frac{5}{2}(a+i\beta)\,i \\
&\Leftrightarrow w = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}\beta i + 2ia - 2\beta - \frac{5}{2}ai + \frac{5}{2}\beta \\
&\Leftrightarrow w = \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\beta\right) + i\left(\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}a\right)
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$\mathfrak{Re}(w) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\beta \quad , \quad \mathfrak{Im}(w) = \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}a$$

(β΄) Είναι

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\beta\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10\,(a^2+\beta^2)}}{2}$$

(γ΄) Είναι

$$|w| = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{a^2+\beta^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+\beta^2} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

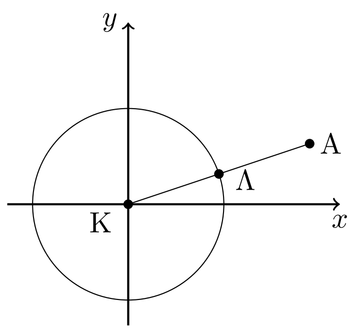
Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

(δ΄) Επειδή

$$\sqrt{a^2+\beta^2} = 1 \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

συμπεραίνουμε ότι ο w κινείται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Ο μιγαδικός $3+i$ έχει εικόνα το σημείο $\mathrm{A}(3,1)$ το οποίο είναι εξωτερικό του κύκλου αφού

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{K},\mathrm{A}) = \sqrt{10} > \rho$$



Η ελάχιστη απόσταση είναι η ΑΛ η οποία ισούται με

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{K},\mathrm{A}\right)-\rho=\sqrt{10}-1$$

♦

Σημείωση: *Μπορεί να βρεθεί και η μέγιστη τιμή του μέτρου αυτού.*

25. Έστω z μιγαδικός αριθμός με $z\neq\pm i$ και

$$w=\frac{z}{z^2+1}$$

(α΄) Αν $w\in\mathbb{R}$ τότε να δειχθεί ότι $z\in\mathbb{R}$ ή $|z|=1$.

(β΄) Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(γ΄) Αν z_1,z_2 οι παραπάνω ριζες τότε να υπολογιστεί η τιμή της

$$\mathcal{K}=\frac{\left(z_1\cdot z_2\right)^3-i}{4+\left(z_1+z_2\right)^2}$$

Λύση. *(α΄) Είναι*

$$\begin{aligned}
w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\bar{w}\Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1}&=\frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+1}\\
&\Leftrightarrow z\left(\bar{z}^2+1\right)=\bar{z}\left(z^2+1\right)\\
&\Leftrightarrow z\bar{z}^2+z=\bar{z}z^2+\bar{z}\\
&\Leftrightarrow |z|\cdot\bar{z}+z=|z|\cdot z+\bar{z}\\
&\Leftrightarrow |z|\left(\bar{z}-z\right)-\left(\bar{z}-z\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\bar{z}-z\right)\left(|z|-1\right)=0
\end{aligned}$$

απ΄ όπου καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(β΄) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}&\Leftrightarrow\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\Leftrightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0
\end{aligned}$$

Η διακρίνουσα Δ της παραπάνω εξίσωσης είναι ίση με $\Delta = -1$. Οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

(γ΄) *Από Vieta έχουμε*

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{a} = \sqrt{3} \quad , \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{a} = 1$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2} &= \frac{1-i}{4+3} \\ &= \frac{1}{7} - \frac{i}{7} \end{aligned}$$

♦

26. Έστω $z,\, w \in \mathbb{C}^*$. Αν ισχύει

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1 \tag{1}$$

τότε να δειχθεί ότι:

(α΄) $|z_1| = |z_2|$

(β΄) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2010} + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2010} = 2$

(γ΄) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2012} + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2012} = -1$

Λύση. (α΄) *Έστω $w = \dfrac{z_1}{z_2}$ τότε η (1) δίδει*

$$w + \frac{1}{w} = 1 \Leftrightarrow w^2 - w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Όμως

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$

και το συμπέρασμα έπεται.

(β′) *Η σχέση* (1) *γράφεται*

$$z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0$$

Επομένως

$$(z_1 + z_2)\left(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2\right) = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -z_2^3$$

Άρα

$$\left(\frac{z_1^3}{z_2^3}\right)^{670} + \left(\frac{z_2^3}{z_1^3}\right)^{670} = (-1)^{670} + (-1)^{670} = 2$$

και το συμπέρασμα έπεται.

(γ′) *Αν* $w = \frac{z_1}{z_2}$ *τότε όμοια από το ερώτημα (β′) έχουμε ότι* $w^3 = -1$. *Όμως* $2012 = 3 \cdot 670 + 2$ *άρα:*

$$\begin{aligned}(w)^{2012} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2012} &= w^2\left(\left(w^3\right)\right)^{670} + \left(\frac{1}{w}\right)^2\left(\left(\frac{1}{w^3}\right)\right)^{670} \\ &= w^2 + \frac{1}{w^2} \\ &= \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - 2w \cdot \frac{1}{w} \\ &= 1 - 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

♦

27. Έστω $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ των οποίων οι εικόνες είναι κορυφές τριγώνου εγγεγραμμένου στο κύκλο $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$. Να δειχθεί ότι:

(α′) $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| = |z_1 + z_2 + z_3|$

(β′) $\dfrac{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)}{z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{R}$

Λύση. (α′) *Αφού το τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο* $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ *είναι*

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\bar{z_1}},\ z_2 = \frac{1}{\bar{z_2}},\ z_3 = \frac{1}{\bar{z_3}}$$

Τότε διαδοχικά είναι:

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2+z_3| &= |\overline{z_1+z_2+z_3}| \\
&= |\bar{z_1}+\bar{z_2}+\bar{z_3}| \\
&= \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| \\
&= \left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{z_1z_2z_3}\right| \\
&= |z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|
\end{aligned}$$

(β′) Έστω w ο μιγαδικός. Αρκεί να δειχθεί ότι $\bar{w}=w$. Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\bar{w} &= \frac{(\bar{z_1}+\bar{z_2})(\bar{z_1}+\bar{z_3})(\bar{z_2}+\bar{z_3})}{\bar{z_1}\bar{z_2}\bar{z_3}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)}{\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_3}} \\
&= \frac{(z_1+z_2)(z_1+z_3)(z_2+z_3)}{z_1z_2z_3} \\
&= w
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο απεδείχθη. ♦

28. Έστω $z\in\mathbb{C}$, $\sin\varphi\neq 1$ και

$$(1+iz)^{\nu}=\frac{i\sin\varphi-1}{i-\sin\varphi} \quad , \quad \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

και ν θετικός ακέραιος.

(α′) Να δειχθεί ότι ο z δεν είναι πραγματικός.

(β′) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z.

(γ′) Να βρεθούν οι μιγαδικοί που έχουν το μέγιστο και ελάχιστο μέτρο.

(δ′) Να δειχθεί ότι $4<|z-3+4i|<7$.

(ε′) Έστω $z_1,\ z_2$ δύο μιγαδικοί που ανήκουν στο πρηγούμενο γεωμετρικό τόπο. Να δειχθεί ότι

$$|z_1-z_2|\leq 2$$

Λύση. (α΄) *Έστω ότι ο z είναι πραγματικός , δηλ. της μορφής $z = a \in \mathbb{R}$. Τότε η (1) δίδει:*

$$\begin{aligned}(1+ia)^\nu = \frac{i\sin\varphi - 1}{i - \sin\varphi} &\Rightarrow |1+ia|^\nu = \left|\frac{i\sin\varphi - 1}{i - \sin\varphi}\right| \\ &\Rightarrow 1 + a^2 = 1 \\ &\Rightarrow a = 0\end{aligned}$$

Οπότε για $a = 0$ η (1) δίδει:

$$1 = \frac{i\sin\varphi - 1}{i - \sin\varphi} \implies \sin\varphi = 1$$

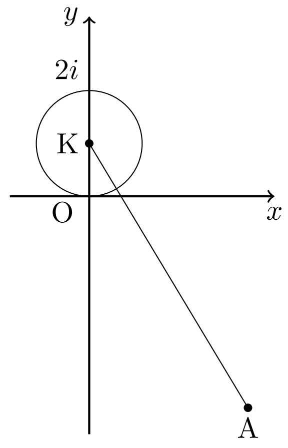
άτοπο. Άρα ο z δεν είναι πραγματικός.

(β΄) *Παίρνοντας μέτρα στην (1) έχουμε:*

$$|1+iz|^\nu = \left|\frac{i\sin\varphi - 1}{i - \sin\varphi}\right| \Leftrightarrow |1+iz| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = 1$$

Οπότε οι εικόνες του z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

(γ΄) *Δουλεύουμε στο επόμενο σχήμα:*



Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z = 2i$ ενώ αυτός με το ελάχιστο είναι $z = 0$.

(δ΄) *Έστω $\mathrm{A}(3,-4)$. Δουλεύοντας στο παραπάνω σχήμα εύκολα βλέπουμε ότι*

$$\mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{A}) = \sqrt{34}$$

Οπότε η μέγιστη τιμή του $|z - 3 + 4i|$ είναι $\sqrt{34} + 1$ ενώ η ελάχιστη $\sqrt{34} - 1$.

(ε΄) *Το $|z_1 - z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών $z_1,\ z_2$. Οι μιγαδικοί $z_1,\ z_2$ ανήκουν στο παραπάνω γεωμετρικό τόπο , οπότε είναι:*

$$|z_1 - i| = 1 \quad , \quad |z_2 - i| = 1$$

Τότε:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |z_1 - i + i - z_2| \\ &= |(z_1 - i) - (z_2 - i))| \\ &\leq |z_1 - i| + |z_2 - i| \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

♦

29. Δίδεται η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right) z}{|z + 10i| - |z - 10i|}$$

Να δειχθεί ότι:

(α΄) το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που ορίζεται η f είναι το $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(β΄) $||z + 10i| - |z - 10i|| \leq 2\,|z|$

(γ΄) $|f(z)| \geq 1$

(δ΄) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει

$$|f(z)| = \frac{1}{6}\,|z|$$

είναι υπερβολή της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

Λύση. (α΄) *Έστω $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{M}(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού στο επίπεδο. Τότε για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει*

$$|z + 10i| - |z - 10i| \neq 0$$

Εξετάζουμε για ποιους μιγαδικούς ισχύει η ισότητα. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |z + 10i| - |z - 10i| = 0 &\Leftrightarrow |z - 10i| = |z + 10i| \\ &\Leftrightarrow |x + (y - 10)\,i| = |x + (y + 10)\,i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 10)^2} \\ &\Leftrightarrow (y - 10)^2 = (y + 10)^2 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Άρα το ευρύτερο υποσύνολο $\mathbb{D}$ *στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση* f *είναι το* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(β΄) *Από τη τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:*

$$\big||z+10i| - |z-10i|\big| \leq |(z+10i) + (z-10i)| = 2\,|z|$$

και το ζητούμενο έπεται.

(γ΄) *Για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *είναι:*

$$\big||z+10i| - |z-10i|\big| \leq 2\,|z| \Rightarrow \frac{1}{\big||z+10i| - |z-10i|\big|} \geq \frac{1}{2\,|z|}$$

Οπότε είναι

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)z}{|z+10i| - |z-10i|}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{3}+i\right)z\right|}{\big||z+10i| - |z-10i|\big|} \\ &= \frac{2\,|z|}{\big||z+10i| - |z-10i|\big|} \\ &\geq 2\,|z| \cdot \frac{2}{|z|} = 1 \end{aligned}$$

(δ΄) *Έχουμε*

$$\begin{aligned} |f(z)| = \frac{1}{6}\,|z| &\Leftrightarrow \left|\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)z}{|z+10i| - |z-10i|}\right| = \frac{1}{6}\,|z| \\ &\Leftrightarrow \frac{2\,|z|}{\big||z+10i| - |z-10i|\big|} = \frac{1}{6}\,|z| \\ &\Leftrightarrow 12\,|z| = \big||z+10i| - |z-10i|\big| \cdot |z| \\ &\Leftrightarrow \big||z+10i| - |z-10i|\big| = 12 \end{aligned}$$

Από τη τελευταία εξίσωση βλέπουμε αμέσως ότι πρόκειται για υπερβολή με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}'(0,-10)$ *και* $\mathrm{E}(0,10)$. *Άρα* $\gamma = 10$. *Επιπλέον είναι* $2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$ *και τέλος*

$$\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2} \Leftrightarrow \beta = 8$$

Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1.$ ♦

30. Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $z, w \in \mathbb{C}$ και για τον οποίον w ισχύει

$$w = \frac{az^{2008} + \beta\,(\bar{z})^{2008} + 2009}{\beta z^{2008} + a\,(\bar{z})^{2008} + 2009}$$

(α΄) Να δειχθεί ότι $\bar{w} = \dfrac{1}{w}$.

(β΄) Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του w καθώς ο z μεταβάλλεται στο $\mathbb{C}$.

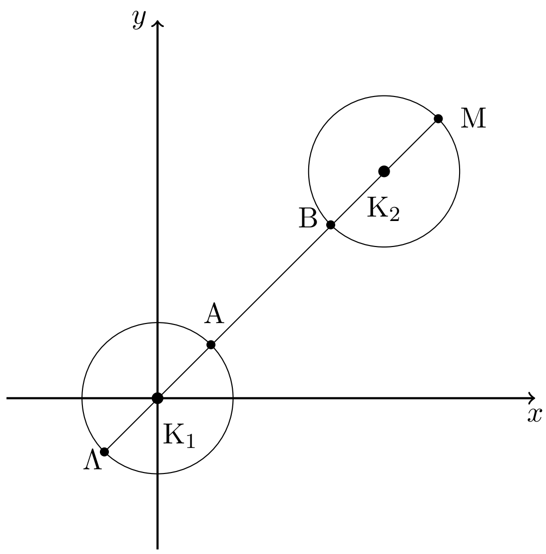
(γ΄) Αν είναι $|z - (3 + 3i)| = 1$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

Λύση. *(α΄) Είναι διαδοχικά:*

$$\begin{aligned}
\bar{w} &= \overline{\frac{az^{2008} + \beta\bar{z}^{2008} + 2009}{\beta z^{2008} + a\bar{z}^{2008} + 2009}} \\
&= \frac{a\bar{z}^{2008} + \beta z^{2008} + 2009}{\beta\bar{z}^{2008} + az^{2008} + 2009} \\
&= \frac{1}{w}
\end{aligned}$$

(β΄) Από το παραπάνω ερώτημα έχουμε ότι ο w κινείται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}_1(0,0)$ *και ακτίνα* $\rho_1 = 1$.

(γ΄) Ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}_2(3,3)$ *και ακτίνα* $\rho_2 = 1$.



Παρατηρούμε ότι οι κύκλοι δε τέμνονται αφού

$$(\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2) = \sqrt{18} > \rho_1 + \rho_2 = 2$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόσταση είναι η $\Lambda\mathrm{M}$ *ενώ η ελάχιστη είναι η* AB. *Κατά συνέπεια:*

$$\Lambda\mathrm{M} = (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2) + \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{18} + 2$$

ενώ

$$\mathrm{AB} = (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2) - \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{18} - 2$$

Άρα

$$|z - w|_{\max} = 3\sqrt{2} + 2 \quad , \quad |z - w|_{\min} = 3\sqrt{2} - 2$$

♦

31. (α′) Αν z μιγαδικός με $z = a + i\beta,\ a, \beta \in \mathbb{R}$ και $z \neq -i$ τότε να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(ii) $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z) > 0$

(β′) Αν $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\nu \in \mathbb{C} - \{-i\}$ με $z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu \neq -i$ και ισχύει ότι:

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| < 1$$

τότε να δειχθεί ότι:

(i) Κανένας από τους $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\nu$ δεν είναι πραγματικός.

(ii) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu - i}{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu + i}\right| < 1.$

Λύση. *(α′)* *(i) Είναι* $|z - i| = |z + i|$ *άρα ο* z *κινείται στη μεσοκάθετο* AB *όπου* $\mathrm{A}(0, -1)$ *και* $\mathrm{B}(0, 1)$ *και κατά συνέπεια* $z \in \mathbb{R}$.

(ii) Είναι

$$|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \mathfrak{Im}(z) > 0$$

(β΄) *(i)* *Αν κάποιους από τους $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ήταν πραγματικός (για παράδειγμα ο z_κ) τότε οι μιγαδικοί οι $z_\kappa - i,\ z_\kappa + i$ θα ταν συζυγείς. Τότε όμως θα χαμε:*

$$\left|\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \cdots + \left|\cancelto{1}{\frac{z_\kappa - i}{z_\kappa + i}}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| \geq 1$$

(άτοπο) άρα κανείς από τους $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\nu$ δεν είναι πραγματικός.

(ii) *Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος (β΄) έχουμε ότι:*

$$\left|\frac{z_i - i}{z_i + i}\right| < 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

Οπότε από το ερώτημα (α΄) ii. είναι $\mathfrak{Im}(z_i) > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Άρα:

$$\mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2) + \cdots + \mathfrak{Im}(z_\nu) > 0 \implies \mathfrak{Im}\left(z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu\right) > 0$$

Συνεπώς από το ερώτημα (α΄) ii. έχουμε τελικά ότι

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu - i}{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu + i}\right| < 1$$

και το ζητούμενο δείχθηκε. ♦

32. Δίδεται η εξίσωση

$$z^2 - \Delta z - \Delta \tag{1}$$

η οποία έχει μιγαδικές ρίζες και Δ είναι η διακρίνουσά της.

(α΄) Να βρεθούν οι ρίζες της (1).

(β΄) Έστω $z_1,\ z_2$ οι ρίζες της (1). Τι είδος τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των δύο ριζών και η αρχή των αξόνων ;

Λύση. *(α΄) Η διακρίνουσα της (1) είναι ίση με:*

$$\Delta = \Delta^2 + 4\Delta \Leftrightarrow \Delta^2 + 3\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = -3$$

αφού η (1) έχει μιγαδικές ρίζες. Τότε οι ρίζες της (1) είναι οι

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textit{και} \quad z_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(β΄) Εύκολα ο αναγνώστης διαπιστώνει ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. ♦

33. Έστω οι μιγαδικοί $z_i,\ i = 1, 2, 3$ οι οποίοι έχουν μέτρο 2. Να δειχθεί ότι

$$w = (z_1 + \bar{z_2})(z_2 + \bar{z_3})(z_3 + \bar{z_1}) \in \mathbb{R}$$

Λύση. *Είναι*

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1},\ \bar{z_2} = \frac{1}{z_2},\ \bar{z_3} = \frac{1}{z_3}$$

και

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (\bar{z_1} + z_2)(\bar{z_2} + z_3)(\bar{z_3} + z_1) \\ &= \left(\frac{4}{z_1} + \frac{4}{\bar{z_2}}\right)\left(\frac{4}{z_2} + \frac{4}{\bar{z_3}}\right)\left(\frac{4}{z_3} + \frac{4}{\bar{z_1}}\right) \\ &= w \end{aligned}$$

Το ζητούμενο δείχθηκε. ♦

34. Δίδονται οι μιγαδικοί a, β, γ με μέτρο 1 και άθροισμα διάφορο του μηδενός. Αν ισχύει ότι

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

να δειχθεί ότι:

(α΄) $\left|a^2 + \beta^2\right| = \left|\beta^2 + \gamma^2\right| = \left|\gamma^2 + a^2\right|$

(β΄) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = 0$

(γ΄) Οι εικόνες των $a,\ \beta,\ \gamma,\ a\beta\gamma,\ \dfrac{a\beta + \beta\gamma + \gamma a}{a + \beta + \gamma}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

(δ΄) $|a + \beta + \gamma| = 2$

Λύση. *(α΄) Είναι*

$$\begin{cases} a^2 + \beta^2 = -\gamma^2 & \Longrightarrow \left|a^2 + \beta^2\right| = \left|-\gamma^2\right| = 1 \\ \beta^2 + \gamma^2 = -a^2 & \Longrightarrow \left|\beta^2 + \gamma^2\right| = \left|-a^2\right| = 1 \\ \gamma^2 + a^2 = -\beta^2 & \Longrightarrow \left|\gamma^2 + a^2\right| = \left|-\beta^2\right| = 1 \end{cases}$$

απ΄ όπου έχουμε το ζητούμενο.

(β′) *Ρίχνοντας συζυγή στη σχέση $a^2+\beta^2+\gamma^2=0$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|a|=|\beta|=|\gamma|=1$ παίρνουμε ότι:*

$$\overline{a^2+\beta^2+\gamma^2}=0 \Leftrightarrow \overline{a}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=0$$

(γ′) *Είναι*
$|a|=|\beta|=|\gamma|=1$ *και*
$|a\beta\gamma|=|a|\,|\beta|\,|\gamma|=1$ *και*
$\left|\dfrac{a\beta+\beta\gamma+\gamma a}{a+\beta+\gamma}\right|=\left|\dfrac{a\beta+\beta\gamma+\gamma a}{\overline{a+\beta+\gamma}}\right|=\left|\dfrac{\cancel{a\beta+\beta\gamma+\gamma a}}{\cancel{a\beta+\beta\gamma+\gamma a}}\cdot a\beta\gamma\right|=1$
οπότε το ζητούμενο έπεται.

(δ′) *Ισχύει ότι:*

$$(a+\beta+\gamma)^2=\cancelto{0}{a^2+\beta^2+\gamma^2}+2a\beta+2\beta\gamma+2\gamma a=2\left(a\beta+\beta\gamma+\gamma a\right)$$

Παίρνουμε μέτρα και χρησιμοποιούμε το ερώτημα (γ′) έχουμε ότι

$$|a+\beta+\gamma|=2$$

♦

35. Δίδονται οι μιγαδικοί $a,\ \beta,\ \gamma$ που έχουν μέτρο 2 και ισχύει ότι

$$a+\beta+\gamma=1$$

(α′) Να δειχθεί ότι $\left(a+\bar{\beta}\right)\left(\beta+\bar{\gamma}\right)\left(\gamma+\bar{a}\right)\in\mathbb{R}$.

(β′) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathcal{K}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

(γ′) Να δειχθεί ότι

$$|a+\beta|+|\beta+\gamma|+|\gamma+a|\geq 3$$

Λύση. *(α′) Ανοίγοντας το γινόμενο και εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι:*

$$\left(a+\bar{\beta}\right)\left(\beta+\bar{\gamma}\right)\left(\gamma+\bar{a}\right)=2\mathfrak{Re}\left(a\beta\gamma\right)+2\mathfrak{Re}\left(4\beta\right)+2\mathfrak{Re}\left(4\gamma\right)+2\mathfrak{Re}\left(4a\right)\in\mathbb{R}$$

(β′) Είναι

$$\mathcal{K} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\frac{4}{\bar{a}}} + \frac{1}{\frac{4}{\bar{\beta}}} + \frac{1}{\frac{4}{\bar{\gamma}}} = \frac{\bar{a} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}}{4} = \frac{1}{4}$$

αφού από τη σχέση

$$a + \beta + \gamma = 1$$

ρίχνοντας συζυγή βγάζουμε ότι

$$\bar{a} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 1$$

(γ′) Είναι

$$\left.\begin{array}{l} |a+\beta| = |1-\gamma| \geq 1 \\ |\beta+\gamma| = |1-a| \geq 1 \\ |\gamma+a| = |1-\beta| \geq 1 \end{array}\right\} (+) \Rightarrow |a+\beta| + |\beta+\gamma| + |\gamma+a| \geq 3$$

♦

36. Έστω ο μη μηδενικός αριθμός z τέτοιος ώστε

$$|2z - 1| = |z - 2|$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $|z| = 1$.

(β′) ο $w = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

(γ′) $4 \leq |z + 3 + 4i| \leq 6$.

Λύση. *(α′) Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη ως απλές.*

(β′) Είναι

$$w = z + \bar{z} = 2\mathfrak{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

(γ′)

$$||z| - |3+4i|| \leq |z + 3 + 4i| \leq |z| + |3+4i| \Leftrightarrow 4 \leq |z + 3 + 4i| \leq 6$$

♦

37. Δίδονται οι μιγαδικοί $\beta,\ \gamma$ με $\beta \neq \gamma$ των οποίων οι εικόνες βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Να δειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό w το τετράγωνο του αριθμού

$$\frac{w+\beta\gamma\bar{w}-(\beta+\gamma)}{\beta-\gamma}$$

είναι πραγματικός μη θετικός αριθμός.

Λύση. *Αρκεί να δείξουμε ότι ο ζητούμενος μιγαδικός αριθμός είναι της μορφής ia όπου $a \in \mathbb{R}$. Έστω u ο ζητούμενος μιγαδικός. Επειδή*

$$|\beta| = |\gamma| = 1 \implies \bar{\beta} = \frac{1}{\beta},\ \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

θα είναι

$$\bar{u} = \frac{\bar{w}+\bar{\beta}\bar{\gamma}w-\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}} = \frac{w+\beta\gamma\bar{w}-(\beta+\gamma)}{\gamma-\beta} = -u$$

και το ζητούμενο έπεται. ♦

38. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^4 - 4\bar{z} + 3 = 0$$

όταν $|z| = 1$.

Λύση. *Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις:*

$$z^4 = 4\bar{z} - 3 \quad , \quad \bar{z}^4 = 4z - 3$$

οπότε παίρνουμε ότι:

$$|z|^8 = 16\,|z|^2 - 12z - 12\bar{z} + 9 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow z = 1$$

♦

1.9 Προτεινόμενες Ασκήσεις

1.9.1 Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Το σύνολο $\mathbb{C}$ καλείται υπερσύνολο των αριθμών.	☐	☐
(β′)	Κάθε αριθμός της μορφής $z = i\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ είναι φανταστικός.	☐	☐
(γ′)	Είναι $\mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.	☐	☐
(δ′)	Αν $z = a + i\beta$ τότε $\mathfrak{Re}(z) = a$ και $\mathfrak{Im}(z) = i\beta$.	☐	☐
(ε′)	Τα παραστατικά σημεία των συζυγών μιγαδικών είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.	☐	☐

2. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Είναι $z + \bar{z} = \mathfrak{Re}(z)$ και $z - \bar{z} = \mathfrak{Im}(z)$.	☐	☐
(β′)	Είναι $\|z\|^2 = z^2$.	☐	☐
(γ′)	Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και Α η εικόνα τού στο μιγαδικό επίπεδο. Αν $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα του z τότε ο z ταυτίζεται με τη διανυσματική του ακτίνα.	☐	☐
(δ′)	Αν z φανταστικός αριθμός τότε ο $w = iz$ είναι πραγματικός.	☐	☐
(ε′)	Δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z που να είναι συγχρόνως και φανταστικός και πραγματικός.	☐	☐

3. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Είναι $z + \bar{z} = \mathfrak{Re}(z)$ και $z - \bar{z} = \mathfrak{Im}(z)$.	☐	☐
(β′)	Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $$az^2 + \beta z + \gamma,\ a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονες $y'y$.	☐	☐
(γ′)	Ισχύει $\mathfrak{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}\,(z_1) + \mathfrak{Re}\,(z_2)$ και $$\mathfrak{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}\,(z_1) + \mathfrak{Im}\,(z_2)$$	☐	☐
(δ′)	Αν $z^2 + w^2 = 0$ όπου z, w μιγαδικοί αριθμοί τότε $z = w = 0$.	☐	☐
(ε′)	Αν $z = a + i\beta$ τότε $\|z\| = \sqrt{a^2 - \beta^2}$.	☐	☐

4. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζεται διάταξη.	☐	☐
(β′)	Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\mathfrak{Im}(z) = 0$.	☐	☐
(γ′)	Αν $z \in \mathbb{I}$ τότε $\bar{z} = -z$.	☐	☐
(δ′)	Αν για το μιγαδικό $z \in \mathbb{C}$ είναι $\mathfrak{Re}(z) \cdot \mathfrak{Im}(z) \neq 0$ τότε $$\mathfrak{Re}(z^\nu) \cdot \mathfrak{Im}(z^\nu) \neq 0$$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.	☐	☐
(ε′)	Είναι $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_\nu$.	☐	☐

5. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Ισχύει $\lvert z\rvert^{\nu} = \lvert z^{\nu}\rvert$.	☐	☐
(β′)	Ισχύει $\lvert z\rvert - \lvert w\rvert \leq \lvert z+w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$	☐	☐
(γ′)	Η εξίσωση $\lvert z - z_0\rvert = \rho > 0$ όπου z_0 σταθερός μιγαδικός παριστάνει έλλειψη.	☐	☐
(δ′)	Ισχύει $\lvert z\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$.	☐	☐
(ε′)	Αν ισχύει $\lvert z\rvert < 1$ τότε οι εικόνες του z κινούνται σε δακτύλιο.	☐	☐

6. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		σ	λ
(α′)	Αν ισχύει $\lvert z-1\rvert > \lvert z-i\rvert$ τότε οι εικόνες του z κινούται σε ευθεία.	☐	☐
(β′)	Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{iz+1}{z^2+1}$ ορίζεται όταν $z \neq i$.	☐	☐
(γ′)	Η συνάρτηση $$f(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$ έχει τέσσερεις μιγαδικές ρίζες.	☐	☐
(δ′)	Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν στο σύνολο $\mathbb{C}$ έχει ν ακριβώς ρίζες.	☐	☐
(ε′)	Η συνάρτηση $f(z) = iz$ παριστάνει στροφή στο μιγαδικό επίπεδο.	☐	☐

7. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $\|z\| + \|w\| = 0$ τότε $z = w = 0$.	☐	☐
(β′)	Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$ και $\|z_1\| = \|z_2\|$ τότε $z_1 = z_2$.	☐	☐
(γ′)	Ισχύει $\|\mathfrak{Re}(z)\| \leq \|z\|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.	☐	☐
(δ′)	Αν είναι $\left\|z^2\right\| = z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.	☐	☐
(ε′)	Οι εικόνες των μιγαδικών z που ικανοποιούν την εξίσωση $$\|z-1\| + \|z+1\| = 2$$ κινούνται πάνω σε μία έλλειψη.	☐	☐

8. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

		Σ	Λ
(α′)	Αν $\|z\| = 1$ τότε $\|z-1\|^2 = 2 - 2\mathfrak{Re}(z)$.	☐	☐
(β′)	Αν z_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma,\ a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ τότε ισχύει ότι $a\left\|z_1\right\|^2 = \gamma$.	☐	☐
(γ′)	Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $$\|z-4i\| + \|\bar{z}+4i\| = 2$$ κινούνται πάνω σε ένα κύκλο.	☐	☐
(δ′)	Ο θετικός ακέραιος ν για τον οποίον ισχύει $(1-i)^{\nu} = 8$ είναι ο $\nu = 6$.	☐	☐
(ε′)	Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στο μοναδιαίο κύκλο τότε η εικόνα $w = \dfrac{3z+1}{z+3}$ κινείται στον ίδιο κύκλο και η μέγιστη απόστασή τους είναι 2.	☐	☐

1.9.2 Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίδονται οι μιγαδικοί $z,\ w,\ \text{v} \in \mathbb{C}$ με $\text{v} = |z| + i\,|z|$ και $w = z^3 + 2i$. Αν οι μιγαδικός $w \in \mathbb{R}$ και η εικόνα του v είναι σημείο της καμπύλης $xy = 2$ τότε να βρεθούν οι δυνατές τιμές του z.

2. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)$$

3. Αν $a, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ και

$$|a| = |\beta| = |\gamma| = \lambda \in \mathbb{R}$$

να δειχθεί ότι:

(α′) $w = \dfrac{\lambda^3 + a\beta\gamma}{(\lambda + a)(\lambda + \beta)(\lambda + \gamma)} \in \mathbb{R}$.

(β′) $w = \left(a + \bar{\beta}\right)(\beta + \bar{\gamma})(\gamma + \bar{a}) \in \mathbb{R}$.

(γ′) $w = (a + \beta + \gamma)\left(\dfrac{i}{a} + \dfrac{i}{\beta} + \dfrac{i}{\gamma}\right) \in \mathbb{I}$.

4. Να βρεθεί ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίον ισχύει:

$$\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^{2\nu} + \left(\frac{4+5i}{5-4i}\right)^{2\nu} = 2^{\nu^2 - 7\nu + 13}$$

5. Δίδονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$5z^6 + 4\bar{z}^6 = 9 \tag{1}$$

$$\frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-2} + \frac{1}{w-3} + \frac{1}{w-4} + \frac{1}{w-5} = 1 \tag{2}$$

(α′) Να δειχθεί ότι $|z| = 1$ και ότι $w = \bar{w}$.

(β′) Να λυθεί η εξίσωση $z^9\bar{z}^5 = 1$.

(γ′) Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού $u = \dfrac{w\,|z|^2 + 3zi}{wzi + 3}$.

6. Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ και $w = 2z + 3 - 4i$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

7. Δίδονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$|(1+i)\,z-2-4i| = \sqrt{18} \tag{1}$$

$$w = 2z - 11 + 5i \tag{2}$$

(α′) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z καθώς και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

(β′) Να βρεθεί η καμπύλη στην οποία κινούνται οι εικόνες των w.

(γ′) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

8. Αν $z^5 = 1$ τότε να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

(α′) $\mathcal{A} = \dfrac{z}{1+z^2} + \dfrac{z^2}{1+z^4} + \dfrac{z^3}{1+z} + \dfrac{z^4}{1+z^3}$

(β′) $\mathcal{B} = \dfrac{z}{1-z^2} + \dfrac{z^2}{1-z^4} + \dfrac{z^3}{1-z} + \dfrac{z^4}{1-z^3}$

*(**Σχόλιο:** Για το δεύτερο άθροισμα θεωρούμε ότι $z \neq 1$.)*

9. Θεωρούμε τα σημεία Α $\left((z_1+z_2)^{2\nu}\right)$ και Β $\left((z_1-z_2)^{2\nu}\right)$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $z_1 \neq \pm z_2$. Αν ισχύει ότι $|z_1| = |z_2| = 1$ τότε να δειχθεί ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{O}$ όπου Ο η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά .

10. Δίδονται οι μιγαδικοί $z,\ w,\ u$ για τους οποίους ισχύουν:

$$|z| = \sqrt{2} \tag{1}$$

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{w+3i}{w-3i}\right) = 0 \tag{2}$$

$$(u+2)^4 = 4\,(u+1)^4 \tag{3}$$

(α′) Να βρεθούν τα μέτρα των $u,\ w$.

(β′) Να δειχθεί ότι:

$$|z+w+u| = \frac{1}{6}\,|2zw+2wu+9zu|$$

11. Έστω ο μιγαδικός $z = \dfrac{1}{2+ia},\ a \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι:

(α′) $z + \bar{z} = 4z\bar{z}$

(β′) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z για τις διάφορες τιμές του a είναι κύκλο με κέντρο Κ $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.

(γ′) οι εικόνες των μιγαδικών z και $w = \dfrac{a}{2a - 4i}$ είναι σημεία αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

(δ′) οι εικόνες των μιγαδικών

$$\frac{1}{2+i} \quad , \quad \frac{1}{2-4i} \quad , \quad \frac{1}{2+2010i}$$

αποτελούν κορυφές ορθογώνιου τριγώνου.

12. Δίδεται η εξίσωση

$$\frac{z}{4} = 1 - \frac{2}{z} \quad , \quad z \neq 0 \tag{1}$$

(α′) Αν $z_1, \ z_2$ είναι λύσεις της (1) τότε να δειχθεί ότι:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2012} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2014} = 0$$

(β′) Αν για το μιγαδικό αριθμό w ισχύει

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = 16 \tag{2}$$

όπου $z_1, \ z_2$ οι λύσεις της (1) τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων w και να αιτιολογηθεί η ισότητα $|w - 2| = 2$.

(γ′) Έστω οι μιγαδικοί $w_1, \ w_2$ που ικανοποιούν τη (2) και για τους οποίους ισχύει $|w_1 - w_2| = 4$. Να δειχθεί ότι $|w_1 + w_2| = 4$.

(δ′) Αν οι μιγαδικοί $w_1, \ w_2, \ w_3$ ικανοποιούν τη (2) τότε να δειχθεί ότι:

$$\left|\frac{w_1 + w_2 + w_3 - 6}{4}\right| = \left|\frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{w_2 - 2} + \frac{1}{w_3 - 2}\right|$$

13. Δίδεται ο μιγαδικός z και η συνάρτηση

$$f(z) = z + i\bar{z}$$

(α′) Αν $z \neq 0$ να δειχθείότι:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 2$$

(β′) Αν Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $f(i), \ f(1+i)$ να δειχθεί ότι τα σημεία Ο, Α, Β , όπου Ο η αρχή των αξόνων , είναι συνευθειακά.

(γ′) Αν $f(z) \neq 0$ να βρεθεί ο αριθμός

$$\left(\frac{\overline{f(z)}}{f(z)}\right)^{2014}$$

(δ′) Αν ισχύει ότι $f(z) + \overline{f(z)} = 4$ τότε να βρεθεί:

(i) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z.

(ii) η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

14. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{(1 - z^{\nu})(1 + \bar{z})}{(1 + z)^{\nu}(1 - \bar{z})},\ \nu \in \mathbb{N}$$

(α′) Να δειχθεί ότι

$$\overline{f(z)} = f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\ ,\ z \neq 0$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $|z| = 1$ τότε

(β′) να δειχθεί ότι $\overline{f(z)} = f(z)$.

(γ′) αν $z = \cos\theta - i\sin\theta$ να δειχθεί ότι $f(z) \in \mathbb{R}$.

15. Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_1 z_2 \neq 0$ τέτοιοι ώστε:

$$z_1 \cdot 2008^{|z_1|} + z_2 \cdot 2008^{|z_2|} = (z_1 + z_2) \cdot 2008^{|z_1+z_2|}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2|$ ή $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$

(β′) Αν τα σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2)$ **δεν** είναι συνευθειακά , τότε να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\,(z_1 + z_2)$ είναι κάθετα.

16. Δίδεται ο μιγαδικός z και έστω

$$f(z) = \frac{2 + i\bar{z}}{1 - \bar{z}} \quad , \quad z \neq 1$$

(α′) Να βρεθεί το μέτρου τοπυ $f(2)$.

(β′) Να δειχθεί ότι

$$\left|\frac{f(z) - 2}{f(z) + i}\right| = |z|$$

(γ′) Αν $|z| = 1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας της $f(z)$.

17. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z-1| = |z-3i|$ τότε

(α′) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z.

(β′) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

(γ′) Παίρνει το $|z|$ μέγιστη τιμή ;

(δ′) Να βρεθεί ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο.

18. Αν $|z+3i| \leq 1$ τότε να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-4|$.

19. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa,\ \kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ όπου $x_\kappa, y_\kappa \in \mathbb{R}$ και έναν μιγαδικό w με

$$w^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_\nu^2$$

Να δειχθεί ότι:

$$|\mathfrak{Re}(w)| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2}$$

20. Να δειχθεί ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$|(1+z)^\nu - 1| \leq (1+|z|)^\nu - 1$$

21. Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόπο των μιγαδικών z, w για τους οποίους ισχύει:

$$\left(16\,|z|^2 - 2\,|z| + 2\right)\left(2\,|w|^2 - 8\,|w| + 40\right) = 62$$

22. Διδονται οι μιγαδικοί

$$z_1 = \sqrt{2} + i \quad , \quad z_2 = 1 - i\sqrt{2}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $z_1 = iz_2$

(β′) $\dfrac{xz_1 - z_2}{z_1 + xz_2} = i$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) $z_1^{2014} + z_2^{2014} = 0$

(δ′) Αν A, B οι εικόνες των z_1, z_2 και Ο είναι η αρχή των αξόνων , τότε να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(ε′) Αν για το μιγαδικό z είναι $|z| = 1$ να δειχθεί ότι:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \leq \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

23. Έστω $z_1,\ z_2,\ z_3$ μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και ο αριθμός

$$a = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $\dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_3}{z_2} + \dfrac{z_1}{z_3} = a$

(β′) $\left(x - \dfrac{z_1}{z_2}\right)\left(x - \dfrac{z_2}{z_3}\right)\left(x - \dfrac{z_3}{z_1}\right) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) $z_1 = z_2$ ή $z_2 = z_3$ ή $z_3 = z_1$.

24. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = g(0)x^2 + x + \left|z - \frac{1}{4}\right| + \left|z + \frac{1}{4}\right|$$

Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ να δειχθεί ότι $z \in \mathbb{R}$.

25. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in (0, +\infty)$ και $z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in \mathbb{C}$. Αν ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{a_i} = 1$, να δειχθεί ότι:

$$\left|\sum_{i=1}^{\nu} z_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{\nu} a_i\,|z_i|^2$$

26. Αν $|z| < 1$ και τα σημεία $1 - z, 1 - z^2, 1 - z^3$ ορίζουν τρίγωνο τότε να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων κείται εκτός του τριγώνου.

27. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $z^{2017} = 1$ και $z \neq 1$. Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{2017} \frac{1}{1 + z^n}$$

28. *(G. Stoika , Καναδάς)* Έστω $z_1, z_2, \ldots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right)^2 - \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{Re}\,(z_k)| - \left|\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}\,(z_k)\right|\right)^2$$

29. Με τη βοήθεια των μιγαδικών αριθμών να δειχθεί ότι:

(α′) $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$

(β′) $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$

30. Θέτουμε $a = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^7 \\ a^4 & a^6 & a^8 \\ a^5 & a & a^3 \end{vmatrix} = -3$$

31. Έστω $z \neq 0$ ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$. Να δειχθεί ότι:

$$|z| + \frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5}$$

32. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Θέτουμε:

$$z_\nu = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1 + \frac{i}{\sqrt{\nu}}\right)$$

Να δειχθεί ότι $|z_{\nu+1} - z_\nu| = 1$.

33. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$(1 + iz)^\nu = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ δεν έχει πραγματική ρίζα. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση.

34. Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ ένα σύνολο με τις παρακάτω ιδιότητες:

- $0 \in \mathcal{M}$
- Αν $x \in \mathcal{M}$ τότε $(\cos x + i\sin x) \in \mathcal{M}$
- Αν $(\cos 2x + i\sin 2x) \in \mathcal{M}$ τότε $x \in \mathcal{M}$

Να δειχθεί ότι:

(α′) Το $\mathcal{M}$ περιέχει τουλάχιστον 3 ακεραίους.

(β′) Το $\mathcal{M}$ περιέχει άπειρους άρρητους.

(γ′) Το $\mathcal{M}$ περιέχει άπειρους μη πραγματικούς αριθμούς.

35. Τρεις μιγαδικοί a, β, γ έχουν μέτρο 1 και ικανοποιούν τη σχέση

$$a + \beta + \gamma = 1$$

Να δειχθεί ότι:

(α′) $a\beta + \beta\gamma + \gamma a = a\beta\gamma$

(β′) $(1-a)(1-\beta)(1-\gamma) = 0$

(γ′) $\frac{1}{a^{2009}} + \frac{1}{\beta^{2009}} + \frac{1}{\gamma^{2009}} = 1$

(δ′) Αν οι a, β, γ είναι διαφορετικοί ανά 2 τότε οι εικόνες τους σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

36. Να δειχθεί πως κάθε μιγαδικός z με $|z| = 1$ και $\mathfrak{Im}(z) \neq 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$z = \frac{1 + i\kappa}{1 - i\kappa}$$

με κ κατάλληλο αριθμό.

37. Έστω πραγματικοί θετικοί αριθμοί $a_i,\ i = 1, \ldots, \nu$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_\nu} = 1$$

Να δειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό $z_i,\ i = 1, \ldots, \nu$ ισχύει ότι:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu|^2 \leq a_1 |z_1|^2 + a_2 |z_2|^2 + \cdots + a_\nu |z_\nu|^2$$

38. Έστω $z = e^{i\theta},\quad |\theta| < \pi$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(α′) $|1 + z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$

(β′) $\arg(1 + z) = \frac{\theta}{2}$

(γ′) Δώσατε τη γεωμετρική ερμηνεία του $\arg(1 + z)$ και του $\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

39. Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^{\nu-1} = \bar{z},\ \nu \in \mathbb{N}$$

40. Έστω a, β, γ τρεις μιγαδικοί αριθμοί με μέτρο 1. Αν ισχύει:

$$\frac{\beta}{a} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{a}{\gamma} = 3i\sqrt{3} + \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{a}$$

τότε να δειχθεί ότι $a + \beta + \gamma = 0$.

41. Έστω P πολυώνυμο βαθμού 2ν με ρίζες συζυγείς ανά δύο. Να δειχθεί ότι οι συντελεστές του έχουν εικόνες συνευθειακά σημεία του επιπέδου.

42. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$. Εαν ισχύει ότι:

$$(1+z)^{2\nu} + (1-z)^{2\nu} = \left(1 - z^2\right)^{\nu}$$

να δειχθεί ότι $|1 + z| = |1 - z|$.

43. Να υπολογιστεί η δύναμη:

$$\mathcal{P} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{72}$$

44. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$$z = \frac{2}{2 + \cos t + i \sin t}$$

κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρεθεί η εξίσωση.

45. Έστω $\nu \in \mathbb{N}$ και ρ η ρίζα του πολυωνύμου

$$x^{\nu} + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1} \in \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι:

$$|\rho| < 1 + |a_{\nu-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$$

46. *(Matematica Gazetta 2011)* Οι μιγαδικοί $z_1,\ z_2,\ z_3$ έχουν μέτρα 1 και για αυτούς ισχύει:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$$

Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α′) $\mathcal{A} = |z_1 + 2z_2 + 3z_3|$

(β′) $\mathcal{B} = |z_1 + z_2 + z_3|$

47. Να δειχθεί ότι τα σημεία που είναι εικόνες των μιγαδικών

$$z_1 = \alpha + i\alpha \quad , \quad z_2 = \alpha - 5i\alpha \quad , \quad z_3 = -\alpha - 7i\alpha \quad , \quad z_4 = -\alpha + 3i\alpha$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ομοκυκλικά

48. Έστω η εξίσωση $z^2 + z + 1 = 0$.

(α′) Αν ρ μία ρίζα της εξίσωσης τότε να δειχθεί ότι $\rho^3 = 1$.

(β′) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathcal{E} = (z+1)^{2012} + \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2012} + \left(z^5 + z^3\right)^2$$

49. Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z για τον οποίον ισχύει:

$$z = 1 + \cos\theta + 2i$$

50. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z για τον οποίον ισχύει ότι:

$$\left|z^2 + 1\right| = 3$$

51. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{|z_1 + z_2|}{1 + |z_1 + z_2|} \leq \frac{|z_1|}{1 + |z_1|} + \frac{|z_2|}{1 + |z_2|}$$

52. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Να δειχθεί ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$\mathcal{K} = |z - 1| + |z + 1|$$

είναι ίση με $2\sqrt{2}$ και να ερμηνευθεί γεωμετρικά το αποτέλεσμα.